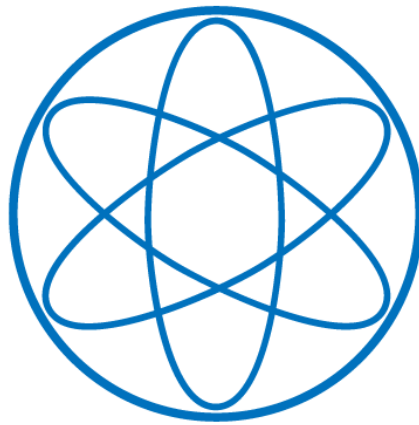


Ferienkurs
Theoretische Physik: Mechanik

Sommer 2013

Probeklausur - Lösung



PHYSIK
DEPARTMENT

1 Kurze Fragen [20 Punkte]

Beantworten Sie folgende Fragen. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Für jede falsche Antwort gibt es einen Minuspunkt. Wird keine Antwort gegeben so wird diese Frage nicht bewertet. Es können auch mehrere Antworten richtig sein. Die Gesamtzahl der Punkte dieser Aufgabe kann nicht negativ sein.

1. Geben Sie die drei Newton'schen Axiome an: [3 Punkte]

- 1. Newton-Axion: Es gibt Bezugssysteme (Inertialsysteme), in denen sich ein Massenpunkt im kräftefreien Raum mit konstanter Geschwindigkeit bewegt $\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \text{const.} \iff \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = 0$.
- 2. Newton-Axiom: Die Änderung des Impulses (der „Bewegungsgröße“) ist der Einwirkung einer Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.
- 3. Newton-Axiom: Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegengerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio): $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.

2. Gegeben sei ein Teilchen der (konstanten) Masse m im konservativen Kraftfeld \vec{F} . Welche der folgenden Aussagen sind richtig? [4 Punkte]

- \vec{F} lässt sich allgemein schreiben als Gradient eines zeitabhängigen Potentials $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\text{grad}U(\vec{r}, t)$. **(falsch)**
- Die verrichtete Arbeit hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Bahnkurve ab. **(wahr)**
- $\text{rot}\vec{F} = 0$ ist eine notwendige Bedingung, damit \vec{F} konservativ ist. **(wahr)**
- Die Gesamtenergie $E = T + U$ ist eine Erhaltungsgröße. **(wahr)**

3. Gegeben sei ein abgeschlossenes System, bestehend aus n Punktteilchen mit Massen m_1, \dots, m_n , das durch ein explizit zeitabhängiges Potential $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$ beschrieben wird. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? [3 Punkte]

- Die Gesamtenergie ist eine Erhaltungsgröße. **(falsch)**
- Ist das Potential invariant unter Verschiebungen um beliebige Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, also $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) = U(\vec{r}_1 + \vec{a}_1, \dots, \vec{r}_n + \vec{a}_n, t)$ dann ist der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$ erhalten. **(wahr)**
- Ist das Potential invariant unter Drehungen, so ist der Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ eine Erhaltungsgröße. **(wahr)**

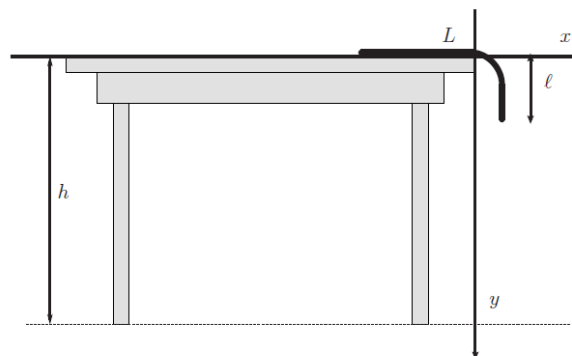
4. Betrachten Sie ein System von n Massenpunkten. m holonome Zwangsbedingungen seien durch m unabhängige Gleichungen der Form $g_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i, t)$ (für $i \in \{1, \dots, m\}$) definiert. Welche der folgenden Aussagen gelten? [3 Punkte]

- Die Dynamik des Systems wird durch $3n$ Lagrange-Gleichungen 1. Art beschrieben. **(wahr)**
- Das System wird durch $n-m$ verallgemeinerte Koordinaten beschrieben. **(falsch)**

- Für ein System mit Potentialkräften, in dem keine Zwangsbedingungen wirken, sind die Euler-Lagrange-Gleichungen 2. Art äquivalent zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen. **(wahr)**
5. Gegeben sei ein System mit Potentialkräften, das durch die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}; t) = T - U$ beschrieben werde. $q = \{q_1, \dots, q_n\}$ und $\dot{q} = \{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n\}$ bezeichnen verallgemeinerte Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten. Welche Aussagen sind korrekt? [4 Punkte]
- Wenn L nicht explizit von \dot{q}_k abhängt, dann ist der generalisierte Impuls $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ eine Erhaltungsgröße. **(falsch)**
 - L ist bis auf eine Konstante eindeutig festgelegt. **(falsch)**
 - Für eine Zentralkraft $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$, ist $U = V(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$, wobei l den Drehimpuls des Systems, \vec{e}_r den radialen Einheitsvektor bezeichnen und $\alpha > 0$. **(falsch)**
 - Die Euler-Lagrange-Gleichungen 2. Art für L folgen aus dem Hamilton'schen Extremalprinzip für die Wirkung. **(wahr)**
6. Betrachten Sie die Bewegung eines starren Körpers dessen Trägheitstensor I bezüglich eines im Schwerpunkt des starren Körpers fest verankerten Koordinatensystems gegeben sei. Welcher der folgenden Aussagen sind richtig? [3 Punkte]
- I verhält sich unter Drehungen R , mit $\vec{r}' = R\vec{r}$, wie ein Tensor 2. Stufe, d.h. $I' = RIR^T$ (R^T ist die zu R transponierte Matrix). **(wahr)**
 - Die kinetische Energie des starren Körpers setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie der Schwerpunkttranslation und der Energie der Rotation um eine Achse durch den Schwerpunkt. **(wahr)**
 - Der starre Körper hat 10 Freiheitsgrade. **(falsch)**

2 Fallendes Seil [16 Punkte]

Ein kurzes Seil der Länge L und der Masse m liege auf einem Tisch der Höhe $h > L$ und werde an einem Ende festgehalten ($\mu := \frac{m}{L}$). Ein Stück l ($0 < l < L$) des Seils hänge lose über die Tischkante. Es wirke nur die Gravitationskraft auf das Seil, Sie können also Reibungs- und Luftwiderstand vernachlässigen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das Seil losgelassen.



- Bestimmen Sie die Kräftebilanz des Systems. Wie lautet also die Bewegungsgleichung für das Seil(ende)?
Hinweise: Wählen Sie das Koordinatensystem wie in obenstehender Abbildung angegeben. Vernachlässigen Sie die Krümmung des Seils an der Tischkante. Beachten Sie, dass die für die Bewegungsgleichung relevante Masse zeitabhängig ist. [3 Punkte]
- Lösen Sie nun die Bewegungsgleichung vollständig unter Einbeziehung der gegebenen Anfangsbedingungen. Wann erreicht das Seilende die Tischkante? Welche Geschwindigkeit hat dann das Seilende? [5 Punkte]
- Wann und mit welcher Geschwindigkeit erreichen Seilanfang und -ende den Boden? [2 Punkte]
- Auf dem Boden steht eine Waage, auf die das Seil fällt. Gehen Sie davon aus, dass das Seil vollkommen inelastisch ist und dass keinerlei Wechselwirkung zwischen den einzelnen Gliedern des Seils auftritt. Bestimmen Sie unter diesen Annahmen das Gewicht $G = G(t)$, dass die Waage anzeigt, als Funktion der Zeit. [6 Punkte]

Lösung:

- Wir fassen die Aufgabe zuerst als eindimensionales Problem in x -Richtung auf. Solange das Seil mit der Länge $-x < 0$ auf dem Tisch liegt, wirkt die Schwerkraft nur auf das Stück mit Länge $L - (-x) = L + x$, also:

$$F = +\mu(L + x)g \quad (1)$$

Beschleunigt wird aber stets die Gesamtmasse $m = L\mu$, sodass aus dem zweiten Newton'schen Axiom folgt:

$$ma = F \quad \implies \quad L\mu\ddot{x} = \mu(L + x)g \quad (2)$$

Die Bewegungsgleichung für das Seilende x lautet damit:

$$\ddot{x} = \frac{g}{L}x + g \quad (3)$$

- Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung ergibt sich als Summe der homogenen Gleichung, $\ddot{x} = \frac{g}{L}x$, plus einer speziellen Lösung von Gleichung (3). Die Lösung der homogenen Gleichung ergibt sich mithilfe des Ansatzes $x_{hom}(t) = \alpha e^{\beta t}$ zu:

$$x_{hom}(t) = \alpha_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t} + \alpha_2 e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} \quad (4)$$

Eine spezielle Lösung errät man einfach. $x_{spez}(t) = -L = const.$, sodass wir die allgemeine Lösung schreiben können als:

$$x(t) = \alpha_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t} + \alpha_2 e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} - L \quad (5)$$

Die vollständige Lösung errechnet sich schließlich noch unter Einbeziehung der Anfangsbedingungen $x(t=0) = -(L-l)$ und $\dot{x}(t=0) = 0$. Die zweite Bedingung führt zu $\alpha_1 = \alpha_2$, die erste damit zu $2\alpha_1 = l$. Mithilfe von $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ lautet die vollständige Lösung:

$$x(t) = l \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) - L \quad (6)$$

Das Seilende erreicht die Tischkante, wenn $x(t = t_1) = 0$ gilt, also:

$$l \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) - L = 0 \quad \implies \quad t_1 = \sqrt{\frac{g}{L}} \operatorname{arcosh}\left(\frac{L}{l}\right) \quad (7)$$

Dann hat das Seilende die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v_1 = \dot{x}(t_1) &= l \sqrt{\frac{g}{L}} \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t_1\right) = l \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t_1\right) - 1} = \\ &= l \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\left(\frac{L}{l}\right)^2 - 1} = \sqrt{g \frac{L^2 - l^2}{L}} \end{aligned} \quad (8)$$

3. Nun betrachten wir die Bewegung auf der y -Achse. Nachdem wir von einem inelastischen Seil mit keinerlei Wechselwirkung unter den einzelnen Gliedern (Bestandteilen) des Seils ausgehen können, fällt jedes Glied mit Masse $dm = \mu dy$ frei zu Boden. Da das Seil (und damit jedes seiner Glieder) zum Zeitpunkt t_1 die Geschwindigkeit v_1 hat, ergibt sich für die Geschwindigkeit des Seils für $t > t_1$ (Bezugsrichtung nach unten):

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= g \\ \dot{y} &= g(t - t_1) + v_1 \\ y &= \frac{1}{2}g(t - t_1)^2 + v_1(t - t_1) + y_0 \end{aligned} \quad (9)$$

Dabei ist $y_0 \in \{0, L\}$ die Position des Seilgliedes im Zeitpunkt t_1 . D. h. der Seilanfang entspricht $y_0 = L$, das Seilende $y_0 = 0$. Ein beliebiges Seilstück trifft auf den Boden wenn $y = h$ gilt. Für den Seilanfang ($y_0 = L$) ist dies der Fall für $t = t_2$, gegeben durch:

$$\frac{1}{2}g(t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1) - (h - y_0) = 0 \quad \implies \quad t_2 = t_1 + \frac{\sqrt{v_1^2 + 2g(h - L)} - v_1}{g} \quad (10)$$

Die zugehörige Geschwindigkeit, $v_2 = \dot{y}(t_2)$, ergibt sich mit Gleichung (9):

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h - L)} \quad (11)$$

Analog ergeben sich Auftreffzeitpunkt und -geschwindigkeit, t_3 bzw. v_3 , des Seilendes mit y_0 zu

$$t_3 = t_1 + \frac{\sqrt{v_1^2 + 2gh} - v_1}{g} \quad \text{und} \quad v_3 = \sqrt{v_1^2 + 2gh} \quad (12)$$

Alternativ kann die Geschwindigkeit, mit der der Seilanfang auf den Boden prallt, aus dem Energiesatz erhalten werden, wenn man beachtet, dass der Seilanfang in $t = t_1$ sich auf einer Höhe $h - L$ über dem Boden befindet:

$$\frac{1}{2}dmv_1^2 + dmgh(h - L) = \frac{1}{2}dmv_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h - L)} \quad (13)$$

Der Seilanfang erreicht nach Gleichung (9) den Boden zum Zeitpunkt:

$$t_2 = t_1 + \frac{v_2 - v_1}{g} \quad (14)$$

mit den entsprechenden Ausdrücken aus den Gleichungen (7), (8) und (13). Das Seilende fällt zum Zeitpunkt $t = t_1$ mit der Geschwindigkeit v_1 aus der Höhe h zu Boden und erreicht ihn mit der Geschwindigkeit v_3 ; der Energiesatz ergibt wiederum:

$$\frac{1}{2}dmv_1^2 + dmgh = \frac{1}{2}dmv_3^2 \quad \Rightarrow \quad v_3 = \sqrt{v_1^2 + 2gh} \quad (15)$$

Das geschieht zum Zeitpunkt:

$$t_3 = t_1 + \frac{v_3 - v_1}{g} \quad (16)$$

4. Das Gewicht G , das die Waage auf dem Boden anzeigt, setzt sich zusammen aus der Gewichtskraft des Seilstücks $F_{Seil} = F_{Seil}(t)$, das bereits auf der Waage liegt, plus der Kraft $F_p = F_p(t)$, die durch den Impulsübertrag eines Seilgliedes der Masse $dm = \mu dy$ und der Geschwindigkeit $v \in \{v_2, v_3\}$ auf die Waage übertragen wird. Um F_{Seil} zu berechnen, bestimmen wir die Länge des Seils, $s = s(t)$, das zum Zeitpunkt $t \in \{t_2, t_3\}$ am Boden liegt. Dazu verwenden wir Gleichung (9), um den Auftreffzeitpunkt, $t(y_0)$ eines beliebigen Seilgliedes, $dm = \mu dy$, das sich in $t = t_1$ bei $y(t_1) = y_0 \in \{0, L\}$ befindet, zu berechnen: Dafür gilt:

$$y(t(y_0)) = h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}g(t(y_0) - t_1)^2 + v_1(t(y_0) - t_1) - (h - y_0) = 0 \quad (17)$$

also

$$t(y_0) = t_1 + \frac{\sqrt{v_1^2 + 2g(h - y_0)} - v_1}{g} \quad \text{und} \quad y_0(t) = \frac{(g(t - t_1) + v_1)^2 - v_1^2}{2g} \quad (18)$$

Wenn das Seilglied aus der Höhe y_0 angekommen ist, liegt bereits ein Seilstück der Länge $s = L - y_0$ auf der Waage. Die Gewichtskraft dieses Seilstücks in Abhängigkeit von der Zeit $t \in \{t_2, t_3\}$ ist dann:

$$F_{Seil}(t) = \mu s(t)g = \mu g \left[L - h + \frac{(g(t - t_1) + v_1)^2 - v_1^2}{2g} \right] \quad (19)$$

Die Kraft F_p erhält man aus dem zweiten Newton'schen Axiom, wenn man als Impuls eines Seilstücks $dm = \mu dy$ direkt über Boden $dp = dm v = \mu dy v$ annimmt und davon ausgeht, dass dieses auf $v = 0$ abgebremst wird. Also:

$$F_p(t) = \frac{dp}{dt} = \mu \frac{dy}{dt} v = \mu v^2 = \mu [g(t - t_1) + v_1]^2 \quad (20)$$

Im Zeitintervall $t \in \{t_2, t_3\}$ zeigt die Waage demnach folgendes Gewicht an:

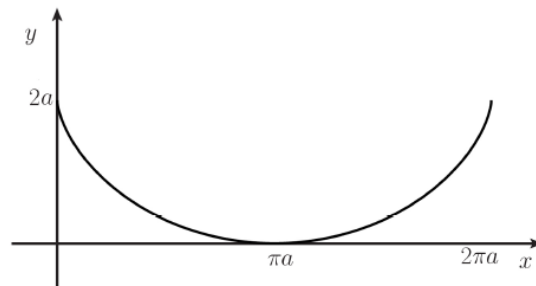
$$G(t) = F_{Seil}(t) + F_p(t) = \mu g \left[L - h + \frac{(g(t - t_1) + v_1)^2 - v_1^2}{2g} \right] + \mu (g(t - t_1) + v_1)^2 \quad (21)$$

Im Zeitintervall $t = t_2$ zeigt die Waage $G(t_2) = \mu v_2^2 = \mu v_1^2 + 2\mu(h - L)g$, zum Zeitpunkt $G(t_3) = \mu Lg + \mu v_3^2 = mg + \mu v_1^2 2\mu hg$. Für $t > t_3$ zeigt die Waage dann natürlich $G(t) = mg$ an.

3 Großvaters ideale Uhr [15 Punkte]

Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei im homogenen Schwerfeld der Erde auf einer Zykloide, die durch $x = a(\vartheta - \sin\vartheta)$, $y = a(1 + \cos\vartheta)$ gegeben ist, wobei $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ (siehe Abbildung). Es wirken keine weiteren Kräfte.

Hinweis: $\sin^2(\frac{\vartheta}{2}) = \frac{1}{2}(1 - \cos\vartheta)$, $1 + \cos\vartheta = 2\cos^2(\frac{\vartheta}{2})$



1. Berechnen Sie die kinetische und potentielle Energie des Teilchens als Funktion einer geeigneten verallgemeinerten (zyklischen) Koordinate. Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf. [4 Punkte]
2. Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung her. [3 Punkte]
3. Berechnen Sie die Lösungen der Bewegungsgleichung für allgemeine Anfangsbedingungen. Wodurch zeichnet sich dieses Systems aus? [6 Punkte]
Hinweis: Führen Sie die Funktion $u(\vartheta) = \cos(\frac{\vartheta}{2})$ ein.
4. Wie lange braucht der Massenpunkt, um aus der Ruhelage von einem Punkt $(x(\vartheta_0), y(\vartheta_0))$, wobei $0 \leq \vartheta_0 \leq \pi$, bis zum Minimum der Zykloide zu gelangen? Was fällt Ihnen auf? [2 Punkte]

Lösung:

1. Aufgrund der Parametrisierung der Zyklode, $x = a(\vartheta - \sin\vartheta)$, $y = a(1 + \cos\vartheta)$, bietet sich ϑ als verallgemeinerte Koordinate an. Die kinetische Energie ist:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ma^2\dot{\vartheta}^2[(1 - \cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta] = \\ &= 2ma^2\dot{\vartheta}^2\frac{1}{2}(1 - \cos\vartheta) = 2ma^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

die potentielle Energie:

$$U = mgy = mga(1 + \cos\vartheta) = 2mgacos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (23)$$

Damit ist die Lagrangefunktion:

$$L = T - U = 2ma^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - 2mgacos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (24)$$

2. Die Bewegungs- oder Euler-Lagrange-Gleichung ist:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0 \quad (25)$$

Wir berechnen die einzelnen Beiträge:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) &= \frac{d}{dt}\left[4ma^2\dot{\vartheta}\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right] = \\ &= 4ma^2\left[\ddot{\vartheta}\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \dot{\vartheta}^2\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 2ma^2\dot{\vartheta}^2\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + 2mgacos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (27)$$

Daraus erhalten wir die Bewegungsgleichung:

$$2a\ddot{\vartheta}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + a\dot{\vartheta}^2\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - g\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = 0 \quad (28)$$

3. Diese Gleichung kann analytisch gelöst werden, indem man die Substitution $u(\vartheta) = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$ durchführt. Die Ableitungen von u ergeben zunächst

$$u = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \implies \dot{u} = -\frac{\dot{\vartheta}}{2}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \implies \ddot{u} = -\frac{\ddot{\vartheta}}{2}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{\dot{\vartheta}^2}{4}\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

Offensichtlich reduziert sich die Euler-Lagrange-Gleichung (28) auf:

$$\ddot{u} + \frac{g}{4a}u = 0 \quad (29)$$

Damit beschreibt die reduzierte Bewegung einen perfekten harmonischen Oszillator. Die allgemeine Lösung ist einfach:

$$u(t) = u_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}t\right) + u_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}t\right) \quad (30)$$

Invertierung ergibt:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= 2\arccos\left[u_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}t\right) + u_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}t\right)\right] \\ u_1 &= \cos\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right), \quad u_2 = -\sqrt{\frac{a}{g}}\dot{\vartheta}_0 \sin\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) \end{aligned} \quad (31)$$

wobei wir als Anfangsbedingung $\vartheta(t=0) = \vartheta_0$ und $\dot{\vartheta}(t=0) = \dot{\vartheta}_0$ angenommen haben.

Bemerkung: Besonders einfach ist die Lösung, wenn $\vartheta_0 = 0$ gesetzt wird. Dann ist $\vartheta(t) = \sqrt{\frac{g}{a}}t$. Für die Beschleunigung erhält man $\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = g\left(\sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t\right), -\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t\right)\right)$.

Man erkennt also, dass $\ddot{\vec{r}}(t) \neq -g\vec{e}_y$. Das liegt daran, dass eine Zwangskraft $\vec{Z} = (Z_x, Z_y)$ auftritt, die das Teilchen auf der Brachistochrone hält. Wäre die Brachistochronenbahn nicht vorhanden, würde die Kraft $\vec{G} = (0, -mg)$ auf die Masse wirken. Hier muss jedoch zusätzlich die Zwangskraft $\vec{Z} = mg\left(\sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t\right), 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t\right)\right)$ wirken, die sicherstellt, dass die Masse in jedem Punkt der Bahn nur von der Hangabtriebskraft $m\ddot{\vec{r}}$ parallel zur Bahn beschleunigt wird. Die Zwangskraft ist dann entgegengesetzt zur Normalkraft der Masse bezüglich der Bahn. Insgesamt gilt damit $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{G} + \vec{Z}$. \vec{Z} muss von der Bahn aufgebracht werden. Diese Zwangskraft kann auch mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen 1. Art hergeleitet werden.

4. Um die Zeit T zu bestimmen, die der Massenpunkt benötigt, um von einem beliebigen Anfangspunkt $(x(\vartheta_0), y(\vartheta_0))$ mit $\dot{x}(t=0) = 0$ und $\dot{y}(t=0) = 0$ zum Minimum der Zykloide zu gelangen, bemerken wir zuerst folgende Punkte:

Wegen $\dot{x} = a(1 - \cos\vartheta)\dot{\vartheta} = 0$, $\dot{y} = -a\sin\vartheta\dot{\vartheta} = 0$ folgt auch $\dot{\vartheta}(t=0) = \dot{\vartheta}_0 = 0$. Die Bahnkurve für diesen speziellen Fall ist dann:

$$\vartheta(t) = 2\arccos\left[\cos\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}t\right)\right] \quad (32)$$

Das Minimum der Zykloide entspricht offenbar $\vartheta = \pi$. Die Laufzeit T ist damit bestimmt aus:

$$\vartheta(T) = \pi \iff \cos\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}T\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \iff \sqrt{\frac{g}{4a}}T = \frac{\pi}{2} \quad (33)$$

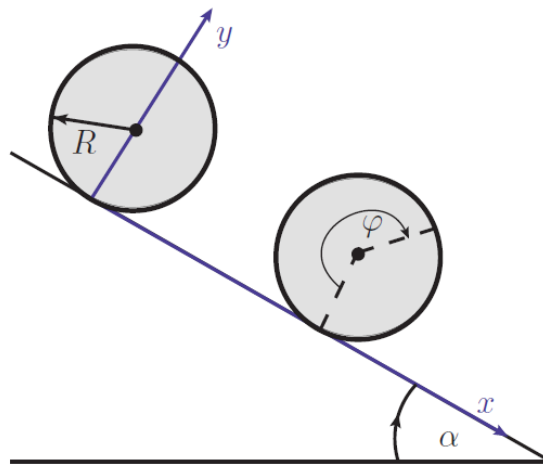
wobei berücksichtigt wurde, dass $0 \leq \vartheta_0 < \pi$ gilt (also $\cos\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) \neq 0$), und T als Zeit des ersten Minimumsdurchgangs aufgefasst wird. Schließlich erhalten wir:

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (34)$$

was erstaunlicherweise unabhängig vom Startpunkt ist. Die Zykloide ist eine sogenannte Tautochrone, was genau die Eigenschaft beschreibt, dass eine Masse, die sich auf einer Zykloide bewegt, immer dieselbe Zeit braucht, um am Minimum anzugelangen.

4 Wettlauf von Kugel und Zylinder [15 Punkte]

Eine homogene Kugel und ein homogener Zylinder mit gleicher Masse M und gleichem Radius R rollen ohne zu gleiten im homogenen Schwerfeld der Erde ($g > 0$) eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel α hinab. Es wirken keine weiteren Kräfte.



1. Berechnen Sie die Trägheitsmomente I_K und I_Z von Kugel bzw. Zylinder bezüglich der Rotationsachse der Rollbewegung (d.h. für die Kugel bezüglich der Rotation um einen Durchmesser und für den Zylinder bezüglich einer Rotation um seine Längsachse). Zeigen Sie, dass mit homogenen Massenverteilungen gilt: [6 Punkte]

$$I_K = \frac{2}{5}MR^2, \quad I_Z = \frac{1}{2}MR^2 \quad (35)$$

2. Stellen Sie für beide Körper die jeweiligen Lagrangefunktion in der generalisierten Koordinate ϕ auf. [6 Punkte]
3. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab. Welcher Körper ist schneller unten, wenn beide vom gleichen Ort aus der Ruhe losgelassen werden? [3 Punkte]

Lösung:

1. In dem angegebenen Koordinatensystem sind die Trägheitsmomente bezüglich einer Achse parallel zur z -Achse (aus der Zeichenebene heraus) durch den Schwerpunkt gesucht. Für den Vollzylinder ergibt sich bei einer Gesamtmasse $M_Z = \rho_Z R^2 \pi h$ (mit der homogenen Dichte ρ_Z und der Höhe h des Zylinders) unter Verwendung von Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 I_Z &= \rho_Z \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R [x(\rho, \varphi, z)^2 + y(\rho, \varphi, z)^2] \rho d\rho d\varphi dz = \\
 &= \rho_Z 2\pi h \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} R^2 \rho_Z R^2 \pi h = \frac{1}{2} M R^2
 \end{aligned} \tag{36}$$

Die Masse der Vollkugel ist $M_K = \rho_K \frac{4\pi}{3} R^3$, wobei ρ_K die homogene Dichte angibt. In Kugelkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 I_K &= \rho_K \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R [x(r, \vartheta, \varphi)^2 + y(r, \vartheta, \varphi)^2] r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = \\
 &= \rho_K 2\pi \int_0^\pi \int_0^R r^4 \sin^3\vartheta dr d\vartheta = \rho_K 2\pi \frac{4}{3} \frac{1}{5} R^5 = \frac{2}{5} M R^2
 \end{aligned} \tag{37}$$

2. Um die Lagrangefunktion für die beiden Systeme herzuleiten, bemerken wir zunächst, dass sich die kinetische Energie T jeweils zusammensetzt aus der kinetischen Energie der Translationsbewegung des Schwerpunkts und der Energie für Rotationen um den Schwerpunkt S . Wir beschreiben zunächst die Bewegung des Schwerpunkts. Nachdem sowohl die Kugel als auch der Zylinder ohne zu gleiten die schiefe Ebene nach unten rollen, gilt in dem angegebenen Koordinaten die Rollbedingung:

$$x_S = R\varphi \tag{38}$$

Diese Beziehung drückt gerade aus, dass der abgerollte Mantel der zurückgelegten Strecke auf der Ebene entspricht. Offenbar gilt weiter $y_S = R = \text{const.}$ Damit bewegt sich der Schwerpunkt mit der Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Nachdem sich alle Punkte der Körper mit derselben Winkelgeschwindigkeit um parallele Achsen bewegen, ist:

$$\omega = \frac{|\vec{v}|}{R} = \dot{\varphi} \tag{40}$$

Hier haben wir die Winkelgeschwindigkeit bezüglich der sogenannten momentanen Drehachse berechnet. Dabei handelt es sich um die Achse, um die der starre Körper in einem festem Zeitpunkt eine reine Rotation ausführt. In dem vorliegenden Beispiel ist dies gerade die Berührungssachse von Körper und schiefer Ebene.

Bemerkung: Die Wahl der Berührungssachse als momentaner Drehachse ist äquivalent zur Rollbedingung; diese Wahl stellt sicher, dass der Körper in der Tat rollt und nicht rutscht (reines Abrollen um die Berührungssachse). Würde man eine andere Achse als momentane Drehachse wählen, so würde der Körper auf der schiefen Ebene zusätzlich rutschen. Das kann man sich anhand von zwei Extremfällen klarmachen: Ist die momentane Drehachse im Unendlichen, so entspricht dies dem Fall des Rutschens ohne zu rollen. Verläuft die momentane Drehachse durch das Zentrum des Körpers, so handelt es sich um eine reine Rotation, ohne Bewegung des Schwerpunkts, gleich einem durchdrehenden Reifen. Die Wahl der Berührungssachse als momentane Drehachse ist also in der Tat äquivalent zur Rollbedingung.

Mit der kinetischen Energie der Schwerpunktsbewegung ($M_K = M_Z = M, R_K = R_Z = R$):

$$T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\varphi}^2 \quad (41)$$

und der Rotationsenergie um den Schwerpunkt:

$$T_{rot,i} = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} I_i \dot{\varphi}^2 \quad (42)$$

($i \in \{K, Z\}$), lautet die kinetische Energie für Kugel bzw. Zylinder:

$$\begin{aligned} T_K &= T_{trans} + T_{rot,K} = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_K \dot{\varphi}^2 = \frac{7}{10} MR^2 \dot{\varphi}^2 \\ T_Z &= T_{trans} + T_{rot,Z} = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_Z \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} MR^2 \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (43)$$

Wir legen den Nullpunkt der potentiellen Energie in $(0, R)$ des angegebenen Koordinatensystems. Dann ist die Lageenergie für beide Körper jeweils gegeben durch:

$$U = -Mg x_s \sin \alpha = -MgR \varphi \sin \alpha \quad (44)$$

Die Lagrange-Funktion für Kugel bzw. Kegel ist damit:

$$\begin{aligned} L_K &= T_K - U = \frac{7}{10} MR^2 \dot{\varphi}^2 + MgR \varphi \sin \alpha \\ L_Z &= T_Z - U = \frac{3}{4} mR^2 \dot{\varphi}^2 + MgR \varphi \sin \alpha \end{aligned} \quad (45)$$

3. Die Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben für die Kugel:

$$\ddot{\varphi} = \frac{5}{7} \frac{g \sin \alpha}{R} \quad (46)$$

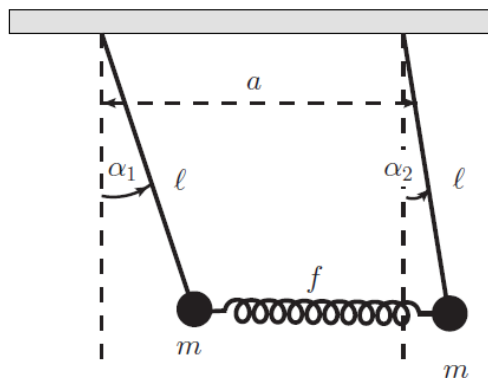
und für den Zylinder:

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{3} \frac{g \sin \alpha}{R} \quad (47)$$

Offenbar ist die (konstante) Beschleunigung für die Kugel, $a_K = R\ddot{\varphi} = \frac{15}{21}g \sin \alpha$, größer als die Beschleunigung für den Zylinder, $a_Z = R\ddot{\varphi} = \frac{14}{21}g \sin \alpha$, sodass die Kugel schneller unten ankommen wird als der Zylinder.

5 Gekoppelte Pendel [15 Punkte]

Zwei gleiche Pendel (Masse m , Länge l) sind durch eine masselose, ideale Feder (Federkonstante f) verbunden und bewegen sich im homogenen Schwerfeld der Erde. Die Ruhelänge a der Feder ist gleich dem Abstand der Pendel in der Ruhelage (siehe Abbildung). Es wirken keine weiteren Kräfte. Man kann annehmen, dass bei kleinen Auslenkungen α_1, α_2 das von der Feder erzeugte Potential nur vom horizontalen Abstand der Pendel abhängt.



1. Formulieren Sie im Falle kleiner Auslenkungen α_1 und α_2 die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen. [4 Punkte]
2. Welche Eigenfrequenzen und Normalschwingungen (Eigenvektoren) hat das System? Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse. [4 Punkte]
3. Berechnen Sie $\alpha_1(t)$ und $\alpha_2(t)$ für die Anfangsbedingungen $\alpha_1(0) = \dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$; $\alpha_2(0) = \alpha_0$. [4 Punkte]
4. Betrachten Sie das System im Limes schwacher Kopplung, d.h. $lf \ll mg$ und diskutieren Sie das Ergebnis. [3 Punkte]

Lösung:

1. Zunächst wollen wir für das Pendel die Auslenkung $\vec{r}_i = (x_i, y_i)^T$, $i \in \{1, 2\}$ durch die generalisierten Koordinaten α_1 und α_2 ausdrücken. Setzt man den Ursprung jeweils in den Aufhängepunkt der Pendel, dann gilt $\vec{r}_i = (l \sin \alpha_i, -l \cos \alpha_i)$. Daraus erhält man dann auch unmittelbar die Geschwindigkeiten der beiden Pendel $\dot{\vec{r}}_i = (l \dot{\alpha}_i \cos \alpha_i, l \dot{\alpha}_i \sin \alpha_i)$ bzw. deren Quadrate $\dot{\vec{r}}_i^2 = l^2 \dot{\alpha}_i^2 (i \in \{1, 2\})$.

Daraus erhalten wir zunächst ganz allgemein die kinetische Energie:

$$T(\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2) = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) \quad (48)$$

Die potentielle Energie setzt sich aus dem Potential der Feder:

$$U_F = \frac{1}{2} f (x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} f (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)^2 \quad (49)$$

und der Lageenergie:

$$U_G = mg(y_1 + y_2) = mgl(-\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = -mgl(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \quad (50)$$

zusammen also:

$$U(\alpha_1, \alpha_2) = U_F(\alpha_1, \alpha_2) + U_G(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) - mgl(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \quad (51)$$

Nun wenden wir die Kleinwinkelnäherung an, um die Bewegungsgleichungen aufzustellen. Für den Sinus gilt dann $\sin \alpha = \alpha + \mathcal{O}(\alpha^3)$ und für den Kosinus $\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^4)$. Setzt man dies in (48) und (51) ein, so erhält man, nach Vernachlässigung konstanter Terme, die Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) - \frac{1}{2} f l^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 - \frac{1}{2} mgl(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \quad (52)$$

Die Bewegungsgleichungen erhalten wir aus den Euler-Lagrange-Gleichungen von (52):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} &= m l^2 \ddot{\alpha}_1 - f l^2 (\alpha_2 - \alpha_1) + mgl \alpha_1 = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} &= m l^2 \ddot{\alpha}_2 + f l^2 (\alpha_2 - \alpha_1) + mgl \alpha_2 = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

Dies kann noch vereinfacht werden zu:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 &= \frac{f}{m} (\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{g}{l} \alpha_1 \\ \ddot{\alpha}_2 &= -\frac{f}{m} (\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{g}{l} \alpha_2 \end{aligned} \quad (54)$$

Um die Bewegungsgleichungen (54) zu lösen, schreiben wir das System (54) in Matrixschreibweise; sei dazu $\vec{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2)^T$. Damit lauten die Bewegungsgleichungen (54):

$$\ddot{\vec{\alpha}} = - \begin{pmatrix} \frac{f}{m} + \frac{g}{l} & -\frac{f}{m} \\ -\frac{f}{m} & \frac{f}{m} + \frac{g}{l} \end{pmatrix} \vec{\alpha} \equiv -A\vec{\alpha} \quad (55)$$

wobei wir die Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} \frac{f}{m} + \frac{g}{l} & -\frac{f}{m} \\ -\frac{f}{m} & \frac{f}{m} + \frac{g}{l} \end{pmatrix} \quad (56)$$

eingeführt haben. Um (55) zu lösen verwenden wir den Ansatz $\vec{\alpha} = \vec{a}e^{i\omega t}$, wobei $\vec{a} \in \mathbb{C}^2$ und $\omega \in \mathbb{R}$ zu bestimmen sind. Sofort berechnet man $\ddot{\vec{\alpha}} = -\omega^2 \vec{a}e^{i\omega t}$ und in (55) eingesetzt ergibt:

$$A\vec{a} = \omega^2 \vec{a} \quad (57)$$

2. Um die Eigenfrequenzen ω zu bestimmen, muss man also die Eigenwerte der Matrix A berechnen; diese Eigenwerte entsprechen den Quadraten der Eigenfrequenzen. Wir erhalten:

$$0 = \det(A - \omega^2 \cdot \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} \frac{f}{m} + \frac{g}{l} - \omega^2 & -\frac{f}{m} \\ -\frac{f}{m} & \frac{f}{m} + \frac{g}{l} - \omega^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{f}{m} + \frac{g}{l} - \omega^2 \right)^2 - \left(\frac{f}{m} \right)^2 \quad (58)$$

Die Eigenfrequenzen sind dann unmittelbar:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \sqrt{2\frac{f}{m} + \frac{g}{l}} \quad (59)$$

Die zugehörigen Eigenräume $E(\omega^2)$ (und damit Eigenvektoren) sind:

$$\begin{aligned} E(\omega_1^2) &= \text{Kern}(A - \omega_1^2 \cdot \mathbb{1}) = \text{Kern} \frac{f}{m} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ E(\omega_2^2) &= \text{Kern}(A - \omega_2^2 \cdot \mathbb{1}) = \text{Kern} \frac{f}{m} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned} \quad (60)$$

Die Eigenschwingungen entsprechen den Eigenvektoren, hier haben wir als Repräsentanten $\vec{a}_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gewählt.

Die erste Eigenfrequenz ω_1 entspricht also der Frequenz eines harmonischen Fadenpendels; in diesem Fall entspricht es zwei in Phase schwingenden Pendeln ($\rightarrow\rightarrow$), beschrieben durch den Eigenvektor \vec{a}_1 ; dann nämlich wird die Feder in der Mitte nicht gedehnt und wirkt sich nicht aus. Die Eigenfrequenz ω_2 entspricht hingegen den Pendeln, wenn sie in Gegenphase schwingen (Eigenvektor \vec{a}_2 , $\rightarrow\leftarrow$); dann hat man eine Überlagerung der Fadenpendel und der Schwingung, die durch die Feder bewirkt wird; der Faktor 2 stammt von der Symmetrie der Anordnung.

3. Die vollständige Lösung des Schwingungsproblems (55) erhält man am einfachsten dadurch, indem man zu Normalkoordinaten ξ_1, ξ_2 übergeht. Dazu diagonalisieren wir zunächst die Matrix A durch Multiplikation mit:

$$S^{-1} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies S = (S^{-1})^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (61)$$

(Die Invertierung von S^{-1} erfolgte durch Transponieren, da S^{-1} eine orthogonale Matrix ist, d. h. die Spalten sind orthonormale Vektoren, $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij}$ für $i, j \in \{1, 2\}$.) Die Diagonalmatrix ist:

$$D = SAS^{-1} = \text{diag} \left(\frac{g}{l}, 2\frac{f}{m} + \frac{g}{l} \right) \quad (62)$$

Definieren wir nun die Normalkoordinaten als:

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T := S \vec{\alpha} \quad (63)$$

dann lautet die Bewegungsgleichung (55):

$$\ddot{\vec{\alpha}} = -S^{-1}DS \vec{\alpha} \iff \ddot{\vec{\xi}} = -D\vec{\xi} \quad (64)$$

Damit sind die Gleichungen für ξ_1 und ξ_2 entkoppelt:

$$\ddot{\xi}_1 = -\omega_1^2 \xi_1, \quad \ddot{\xi}_2 = -\omega_2^2 \xi_2 \quad (65)$$

Die Lösungen können sofort angegeben werden:

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= c_1 \cos(\omega_1 t) + d_1 \sin(\omega_1 t) \\ \xi_2(t) &= c_2 \cos(\omega_2 t) + d_2 \sin(\omega_2 t) \end{aligned} \quad (66)$$

Mit $\vec{\alpha}(t) = S^{-1} \vec{\xi}(t)$ ergibt sich die vollständige Lösung:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xi_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xi_2(t) \quad (67)$$

Aus dieser Darstellung wird noch einmal klar, warum bereits die Eigenvektoren von A als Eigenschwingungen oder Eigenmoden bezeichnet werden: Sie geben nämlich die relativen Amplituden von unabhängigen Schwingungen an.

Setzt man die Anfangsbedingungen $\alpha_1(0) = \dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0, \alpha_2(0) = \alpha_0$ in Gleichung (66) ein, so erhält man das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ \omega_1 d_1 + \omega_2 d_2 &= 0 \\ c_1 - c_2 &= \sqrt{2} \alpha_0 \\ \omega_1 d_1 - \omega_2 d_2 &= 0 \end{aligned} \quad (68)$$

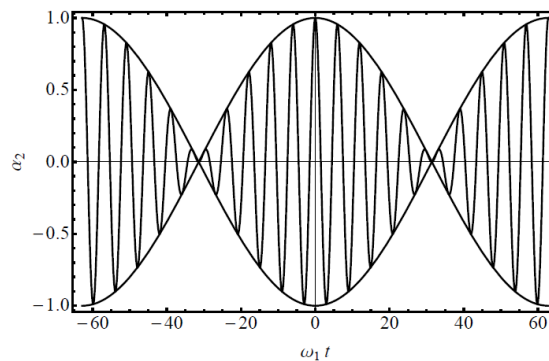
woraus unmittelbar $c_1 = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}$, $c_2 = -\frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}$ und $d_1 = d_2 = 0$ folgt. Die vollständige Lösung ist dann unter Verwendung des zweiten Sumsatzes:

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= \frac{\alpha_0}{2}(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) = -\alpha_0 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \\ \alpha_2(t) &= \frac{\alpha_0}{2}(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = \alpha_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)\end{aligned}\quad (69)$$

4. Für schwache Kopplung $\frac{f}{m} \ll \frac{g}{l}$ kann die zweite Eigenfrequenz entwickelt werden:

$$\left| \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right| \approx \frac{f}{m} \frac{g}{l} \ll 1 \quad (70)$$

In diesem Fall treten sogenannte Schwebungen auf, bei denen die Schwingungen mit Frequenz $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ durch eine langsam variierende Schwingung mit Frequenz $\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right|$ moduliert wird. In der untenstehenden Abbildung ist eine typische Schwebung exemplarisch für α_2 gezeigt ($\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1.1$). Als Schwebungsfrequenz wird $\omega_s = |\omega_1 - \omega_2|$ definiert (und nicht $\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right|$, da in der Regel Intensitäten gemessen werden, die mit der doppelten Frequenz variieren.)



Schwebungen spielen in der Signalverarbeitung und auch in der Musik eine große Rolle. So werden z. B. Schwebungen verwendet, um Musikinstrumente zu stimmen.