Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Sommer 2013

Probeklausur

PHYSIK
DEPARTMENT

1 Kurze Fragen [20 Punkte]

Beantworten Sie folgende Fragen. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Für jede falsche Antwort gibt es einen Minuspunkt. Wird keine Antwort gegeben so wird diese Frage nicht bewertet. Es können auch mehrere Antworten richtig sein. Die Gesamtzahl der Punkte dieser Aufgabe kann nicht negativ sein.

1. Geben Sie die drei Newton'schen Axiome an: [3 Punkte]

2. Gegeben sei ein Teilchen der (konstanten) Masse m im konservativen Kraftfeld $\vec{F}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? [4 Punkte]

   - $\vec{F}$ lässt sich allgemein schreiben als Gradient eines zeitabhängigen Potentials $\vec{F}(\vec{r},t) = -gradU(\vec{r},t)$.
   - Die verrichtete Arbeit hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Bahnkurve ab.
   - $rot\vec{F} = 0$ ist eine notwendige Bedingung, damit $\vec{F}$ konservativ ist.
   - Die Gesamtenergie E = T + U ist eine Erhaltungsgröße.

3. Gegeben sei ein abgeschlossenes System, bestehend aus n Punktteilchen mit Massen $m_1, ..., m_n$, das durch ein explizit zeitabhängiges Potential $U(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n, t)$ beschrieben wird. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? [3 Punkte]

   - Die Gesamtenergie ist eine Erhaltungsgröße.
   - Ist das Potential invariant unter Veschiebungen um beliebige Vektoren $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$, also $U(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n, t) = U(\vec{r}_1 + \vec{a}_1, ..., \vec{r}_n + \vec{a}_n, t)$ dann ist der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i$ erhalten.
   - Ist das Potential invariant unter Drehungen, so ist der Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ eine Erhaltungsgröße.

4. Betrachten Sie ein System von n Massenpunkten. m holonome Zwangsbedingungen seien durch m unabhängige Gleichungen der Form $g_i(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_i; t)$ (für $i \in \{1, ..., m\}$) definiert. Welche der folgenden Aussagen gelten? [3 Punkte]

   - Die Dynamik des Systems wird durch 3n Lagrange-Gleichungen 1.Art beschrieben.
   - Das System wird durch n-m verallgemeinerte Koordinaten beschrieben.
   - Für ein System mit Potentialkräften, in dem keine Zwangsbedingungen wirken, sind die Euler-Lagrange-Gleichungen 2.Art äquivalent zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen.

5. Gegeben sei ein System mit Potentialkräften, das durch die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}; t) = T - U$ beschrieben werde. $q = \{q_1, ..., q_n\}$ und $\dot{q} = \{\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n\}$ bezeichnen verallgemeinerte Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten. Welche Aussagen sind korrekt? [4 Punkte]

   - Wenn L nicht explizit von $\dot{q}_k$ abhängt, dann ist der generalisierte Impuls $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ eine Erhaltungsgröße.
   - L ist bis auf eine Konstante eindeutig festgelegt.
   - Für eine Zentralkraft $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r$, ist $U = V(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$, wobei l den Drehimpuls des Systems, $\vec{e}_r$ den radialen Einheitsvektor bezeichnen und $\alpha > 0$.

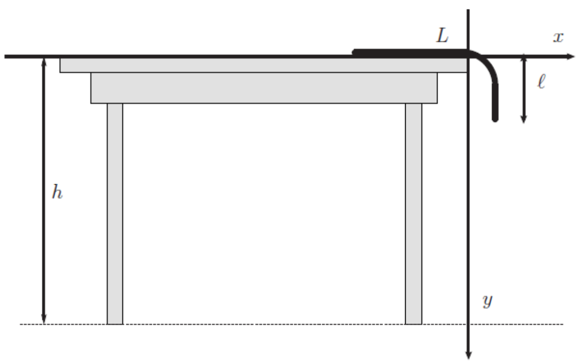
- Die Euler-Lagrange-Gleichungen 2. Art für L folgen aus dem Hamilton'schen Extremalprinzip für die Wirkung.

6. Betrachten Sie die Bewegung eines starren Körpers dessen Trägheitstensor I bezüglich eines im Schwerpunkt des starren Körpers fest verankerten Koordinatensystems gegeben sei. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? [3 Punkte]

   - I verhält sich unter Drehungen R, mit $\vec{r}\,' = R\vec{r}$, wie ein Tensor 2.Stufe, d,h, $I' = RIR^T$ (R^T ist die zu R transponierte Matrix).
   - Die kinetische Energie des starren Körpers setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie der Schwerpunktstranslation und der Energie der Rotation um eine Achse durch den Schwerpunkt.
   - Der starre Körper hat 10 Freiheitsgrade.

2 Fallendes Seil [16 Punkte]

Ein kurzes Seil der Länge L und der Masse m liege auf einem Tisch der Höhe $h > L$ und werde an einem Ende festgehalten ($\mu := \frac{m}{L}$). Ein Stück l ($0 < l < L$) des Seils hänge lose über die Tischkante. Es wirke nur die Gravitationskraft auf das Seil, Sie können also Reibungs- und Luftwiderstand vernachlässigen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das Seil losgelassen.



1. Bestimmen Sie die Kräftebilanz des Systems. Wie lautet also die Bewegungsgleichung für das Seil(ende)?
   Hinweise: Wählen Sie das Koordinatensystem wie in obenstehender Abbildung angegeben. Vernachlässigen Sie die Krümmung des Seils an der Tischkante. Beachten Sie, dass die für die Bewegungsgleichung relevante Masse zeitabhängig ist. [3 Punkte]

2. Lösen Sie nun die Bewegungsgleichung vollständig unter Einbeziehung der gegebenen Anfangsbedingungen. Wann erreicht das Seilende die Tischkante? Welche Geschwindigkeit hat dann das Seilende? [5 Punkte]

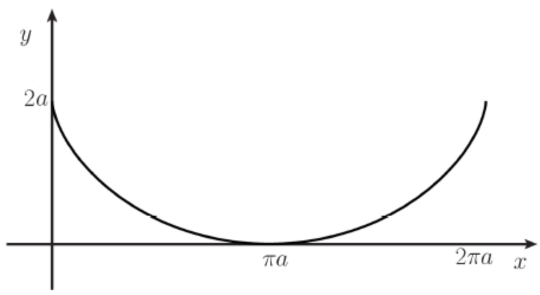
3. Wann und mit welcher Geschwindigkeit erreichen Seilanfang und -ende den Boden? [2 Punkte]

4. Auf dem Boden steht eine Waage, auf die das Seil fällt. Gehen Sie davon aus, dass das Seil vollkommen inelastisch ist und dass keinerlei Wechselwirkung zwischen den einzelnen Gliedern des Seils auftritt. Bestimmen Sie unter diesen Annahmen das Gewicht G = G(t), dass die Waage anzeigt, als Funktion der Zeit. [6 Punkte]

3 Großvaters ideale Uhr [15 Punkte]

Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei im homogenen Schwerefeld der Erde auf einer Zykloide, die durch $x = a(\vartheta - sin\vartheta)$, $y = a(1 + cos\vartheta)$ gegeben ist, wobei $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ (siehe Abbildung). Es wirken keine weiteren Kräfte.

Hinweis: $sin^2(\frac{\vartheta}{2}) = \frac{1}{2}(1 - cos\vartheta)$, $\quad 1 + cos\vartheta = 2cos^2(\frac{\vartheta}{2})$



1. Berechnen Sie die kinetische und potentielle Energie des Teilchens als Funktion einer geeigneten verallgemeinerten (zyklischen) Koordinate. Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf. [4 Punkte]

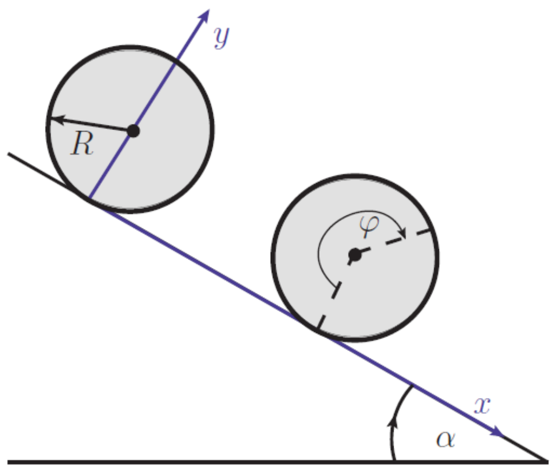
2. Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichung her. [3 Punkte]

3. Berechnen Sie die Lösungen der Bewegungsgleichung für allgemeine Anfangsbedingungen. Wodurch zeichnet sich dieses Systems aus? [6 Punkte]
   Hinweis: Führen Sie die Funktion $u(\vartheta) = cos(\frac{\vartheta}{2})$ ein.

4. Wie lange braucht der Massenpunkt, um aus der Ruhelage von einem Punkt $(x(\vartheta_0), y(\vartheta_0))$, wobei $0 \leq \vartheta_0 \leq \pi$, bis zum Minimum der Zykloide zu gelangen? Was fällt Ihnen auf?
   [2 Punkte]

4 Wettlauf von Kugel und Zylinder [15 Punkte]

Eine homogene Kugel und ein homogener Zylinder mit gleicher Masse M und gleichem Radius R rollen ohne zu gleiten im homogenen Schwerefeld der Erde ($g > 0$) eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel α hinab. Es wirken keine weiteren Kräfte.



1. Berechnen Sie die Trägheitsmomente I_K und I_Z von Kugel bzw. Zylinder bezüglich der Rotationsachse der Rollbewegung (d.h. für die Kugel bezüglich der Rotation um einen Durchmesser und für den Zylinder bezüglich einer Rotation um seine Längsachse). Zeigen Sie, dass mit homogenen Massenverteilungen gilt: [6 Punkte]

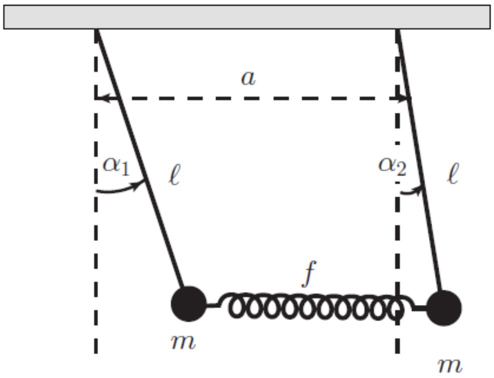
$$I_K = \frac{2}{5} M R^2 \qquad \textit{und} \qquad I_Z = \frac{1}{2} M R^2 \tag{1}$$

2. Stellen Sie für beide Körper die jeweiligen Lagrangefunktion in der generalisierten Koordinate ϕ auf. [6 Punkte]

3. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab. Welcher Körper ist schneller unten, wenn beide vom gleichen Ort aus der Ruhe losgelassen werden? [3 Punkte]

5 Gekoppelte Pendel [15 Punkte]

Zwei gleiche Pendel (Masse m, Länge l) sind durch eine masselose, ideale Feder (Federkonstante f) verbunden und bewegen sich im homogenen Schwerefeld der Erde. Die Ruhelänge a der Feder ist gleich dem Abstand der Pendel in der Ruhelage (siehe Abbildung). Es wirken keine weiteren Kräfte. Man kann annehmen, dass bei kleinen Auslenkungen α_1, α_2 das von der Feder erzeugte Potential nur vom horizontalen Abstand der Pendel abhängt.



1. Formulieren Sie im Falle kleiner Auslenkungen α_1 und α_2 die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen. [4 Punkte]

2. Welche Eigenfrequenzen und Normalschwingungen (Eigenvektoren) hat das System? Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse. [4 Punkte]

3. Berechnen Sie $\alpha_1(t)$ und $\alpha_2(t)$ für die Anfangsbedingungen $\alpha_1(0) = \dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0; \alpha_2(0) = \alpha_0$. [4 Punkte]

4. Betrachten Sie das System im Limes schwacher Kopplung, d.h. $lf \ll mg$ und diskutieren Sie das Ergebnis. [3 Punkte]