Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Sommer 2013

Übung 4 - Lösung

1 Trägheitstensor

1. Ein starrer Körper besteht aus den drei Massenpunkten mit den Koordinaten $\vec{r}_1 = (a, 0, 0)^T$, $\vec{r}_2 = (-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0)^T$, und $\vec{r}_3 = (-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0)^T$. Bestimmen Sie den Trägheitstensor des Körpers in Matrixdarstellung.

2. Berechnen Sie den Trägheitstensor einer Kugelschale (Hohlkugel) der Masse M und mit dem Radius R.

3. Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Zylinders für die Rotationen um die Zylinderachse. Der Zylinder hat die Länge L, die Masse M und der Radius.

   (i) im Falle eines homogenen Vollzylinders

   (ii) im Falle eines Hohlzylinders ohne Deckflächen mit extradünnem Mantel.
   Hinweis: Wählen Sie die Zylinderachse als die z-Achse und berechnen Sie Θ_{33}.

Lösung:

Der Trägheitstensor eines starren Körpers Θ_{ij} ist definiert als:

$$\Theta_{ij} = \sum_{\alpha} m_\alpha (r_\alpha^2 \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}) \tag{1}$$

im Falle einer Massenverteilung und als:

$$\Theta_{ij} = \int \rho(\vec{r})(r^2 \delta_{ij} x_i x_j) d^3 r \tag{2}$$

im Falle einer kontinuierlichen Massendichte $\rho(\vec{r})$.

1. Die Massenpunkte haben die gleiche Masse m. Weil die z- Koordinaten aller Massenpunkte gleich Null sind, verschwinden die Elemente $\Theta_{13} = \Theta_{31}$ und $\Theta_{23} = \Theta_{32}$. Die anderen Elemente lauten:

$$\Theta_{11} m(0 + \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2) = \frac{3}{2}ma^2 \tag{3}$$

$$\Theta_{22} = m(a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2) = \frac{3}{2}ma^2 \tag{4}$$

$$\Theta_{33} = m(a^2 + \frac{1}{4}(1+3)a^2 + \frac{1}{4}(1+3)a^2) = 3ma^2 \tag{5}$$

$$\Theta_{12} = \Theta_{21} = -m(0 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2) = 0 \tag{6}$$

2. Wegen Symmetrie des Problems ist der Trägheitstensor proportional der Einheitsmatrix:

$$\Theta_{ij} = \Theta\delta_{ij} \tag{7}$$

Berechne die Spur von Trägheitstensor:

$$Sp\Theta_{ij} = 3\Theta = 2\sum_{\alpha} m_\alpha r_\alpha^2 = 2MR^2 \quad \Longrightarrow \quad \Theta = \frac{2}{3}MR^2 \tag{8}$$

3. Verwende Zylinderkoordinaten ($\tilde{\rho} = \sqrt{x^2 + y^2}$):

(i)

$$\Theta_{33} = \int_0^R d\tilde{\rho}\tilde{\rho}\frac{M}{\pi R^2 L}\tilde{\rho}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz = \frac{1}{2}MR^2 \tag{9}$$

(ii)

$$\Theta_{33} = \sum_{\alpha} m_\alpha \tilde{\rho}_\alpha^2 = MR^2 \tag{10}$$

2 Physikalisches Pendel

Ein starrer Körper der Masse M wird im homogenen Schwerefeld $\vec{g} = g\vec{e}_z$ im Punkt A aufgehängt, sodass die Bewegung nur in der x-z-Ebene stattfinden kann. Der Abstand zwischen dem Aufhängepunkt und dem Schwerpunkt des Körpers S sei s. Das Trägheitsmoment für die Rotationen um die y-Achse, die durch den Schwerpunkt läuft, sei Θ_y.

1. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Steiner das Trägheitsmoment Θ_y^A für die Rotationen um die y-Achse, die durch den Aufhängepunkt läuft.
2. Betrachten Sie den Auslenkungswinkel φ zwischen der z-Achse und der Linie AS als generalisierte Koordinate. Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Pendels $L(\varphi, \dot{\varphi})$ auf und formulieren Sie die Euler-Lagrange Gleichung für $\varphi(t)$.
3. Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung im Falle kleiner Auslenkungen $\varphi \ll 1$.

Lösung:

Der Trägheitstensor um den Bezugspunkt A (Satz von Steiner) lautet:

$$\Theta_{ij}^A = \Theta_{ij} + M(a^2\delta_{ij} - a_i a_j) \tag{11}$$

wobei $\vec{a}$ der Radiusvektor des Anhängerpunktes ist.

1. $$\Theta_y^A = \Theta_{ij}^A (\vec{e}_y)_i (\vec{e})_j = \Theta_y + Ms^2 \tag{12}$$

2. Die Lagrange-Funktion des Pendels und die Bewegungsgleichung lauten:

$$\begin{aligned} L = T - V = \frac{1}{2}\Theta_y^A \dot{\varphi}^2 - (-Mgz_s) = \frac{1}{2}\Theta_y^A \dot{\varphi}^2 + Mgscos\varphi \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \qquad \Longrightarrow \qquad \Theta_y^A \ddot{\varphi} = -Mgssin\varphi \end{aligned} \tag{13}$$

3. Im Falle kleiner Auslenkungen $\varphi \ll 1$ erhält man:

$$\Theta_y^A \ddot{\varphi} = -Mgssin\varphi \approx -Mgs\varphi \tag{14}$$

Die Lösung der Oszillatorgleichung lautet:

$$\varphi(t) = \varphi(0)cos\omega t + \dot{\varphi}(0)\frac{sin\omega t}{\omega}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{Mgs}{\Theta_y + Ms^2}} \tag{15}$$

3 Rotationsparaboloid

Ein Massenpunkt m bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$ reibungslos auf der Innenseite des Rotationsparaboloids:

$$x^2 + y^2 = 2bz \tag{16}$$

1. Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) auf und eliminieren Sie die Variable z mittels der Zwangsbedingung (16).

2. Formulieren Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für $\varphi(t)$ und $\rho(t)$.

3. Berechnen Sie die z-Komponente des Drehimpulses $L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ in Zylinderkoordinaten und zeigen Sie, dass L_z eine Erhaltungsgröße ist.

4. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_K = const.$, für die eine horizontale Kreisbahn mit $\rho(t) = \rho_0 = const.$ möglich ist. Zeigen Sie, dass $\dot{\varphi}_K$ von der Größe der Bahn unabhängig ist.

5. Im Falle kleiner Auslenkungen:

$$\rho(t) = \rho_0 + \delta\rho(t) \qquad (\delta\rho \ll \rho_0) \tag{17}$$

oszilliert $\rho(t)$ harmonisch um ρ_0. Bestimmen Sie die Oszillatorfrequenz ω und vergleichen Sie ω mit $\dot{\varphi}_K$.

Lösung:

1. In Zylinderkoordinaten gilt:

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_{rho} + z\vec{e}_z \qquad \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_z + \dot{z}\vec{e}_z = \dot{\vec{e}}_{rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \tag{18}$$

Die Lagrange-Funktion ohne Zwangsbedingung wäre:

$$\tilde{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz \tag{19}$$

Unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung $x^2 + y^2 = \rho^2 = 2bz$ erhält man:

$$L = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{\rho^2}{b^2}\right)\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\varphi}^2 - mg\frac{\rho^2}{2b} \tag{20}$$

2. Die Euler-Lagrange-Gleichungen $\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)$ lauten:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\varphi \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt}m\rho^2\dot{\varphi} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad m\rho^2\dot{\varphi} = m\rho^2(0)\dot{\varphi}(0) = const. \tag{22}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\left(1 + \frac{\rho^2}{b^2}\right)\dot{\rho} \qquad \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\frac{\rho}{b^2}\dot{\rho}^2 + m\rho\dot{\varphi}^2 - mg\frac{\rho}{b} \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt}m\left(1 + \frac{\rho^2}{b^2}\right)\dot{\rho} = m\frac{\rho}{b^2}\dot{\rho}^2 + m\rho\dot{\varphi}^2 - mg\frac{\rho}{b} \tag{24}$$

$$\Longrightarrow \qquad \left(1 + \frac{\rho^2}{b^2}\right)\ddot{\rho} = -\rho\left(\frac{\dot{\rho}^2}{b^2} + \frac{g}{b} - \dot{\varphi}^2\right) \tag{25}$$

3. In Zylinderkoordinaten $(x = \rho cos\varphi, y = \rho sin\varphi)$ erhält man:

$$\begin{aligned} L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) &= m\rho cos\varphi\frac{d}{dt}(\rho sin\varphi) - m\rho sin\varphi\frac{d}{dt}(\rho cos\varphi) = \\ &= m\rho cos\varphi(\dot{\rho}sin\varphi + \rho\dot{\varphi}cos\varphi) - m\rho sin\varphi(\dot{\rho}cos\varphi - \rho\dot{\varphi}sin\varphi) = m\rho^2\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{26}$$

Laut der Gleichung (22) ist die z-Komponente des Drehimpulses L_z eine Erhaltungsgröße.

4. Die Gleichung (24) hat eine spezielle Lösung $\rho = \rho_0 = const., \dot{\rho} = 0$ im Falle:

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{g}{b}} = \dot{\varphi}_K \tag{27}$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_K$ hängt nicht von ρ_0 ab.

5. Kleine Auslenkungen:

$$\rho(t) = \rho_0 + \delta\rho(t) \qquad (\delta\rho \ll \rho_0) \tag{28}$$

Betrachten Sie zum Beispiel den Fall:

$$\rho(t=0) = \rho_0 \qquad \dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_K \qquad \dot{\rho}(t=0) \neq 0 \tag{29}$$

Aus Gleichung (22) folgt:

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_K \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \approx \dot{\varphi}_K \left(1 - 2\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right) \tag{30}$$

Die linearisierte Form der Gleichung (24) lautet:

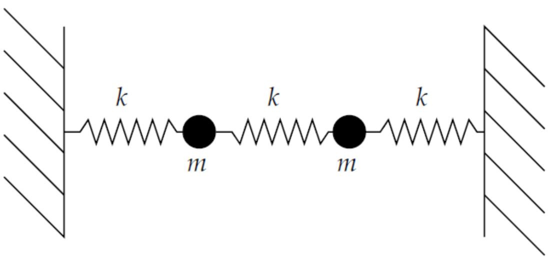
$$\left(1 + \frac{\rho^2}{b^2}\right)\delta\ddot{\rho} \approx \left(1 + \frac{\rho_0^2}{b^2}\right)\delta\ddot{\rho} \qquad \rho\left(\frac{\dot{\rho}^2}{b^2} + \frac{g}{b} - \dot{\varphi}^2\right) \approx 4\dot{\varphi}_K^2\delta\rho \tag{31}$$

$$\delta\ddot{\rho} = -4\dot{\varphi}_K^2 \frac{b^2}{b^2 + \rho_0^2}\delta\rho = -\omega^2\delta\rho \tag{32}$$

Wir erhalten die Oszillatorgleichung mit der Frequenz $\frac{\omega}{|\dot{\varphi}_K|} = \sqrt{\frac{4b^2}{b^2+\rho_0^2}}$.

4 Gekoppelte Oszillatoren

Zwei Teilchen der Masse m sind über drei identische Federn mit Federkonstanten $k = m\omega_0^2$ miteinander und mit den Wänden verbunden. Die Bewegung der Teilchen ist auf die Achse eingeschränkt (longitudinale Schwingung). Die Auslenkung der Teilchen aus der Ruhelage wird mit x_1 und x_2 bezeichnet.



1. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen im Falle kleiner Auslenkungen lauten:
$$\ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \qquad \ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0 \tag{33}$$

2. Durch die Einführung des Auslenkvektors $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$ erhält man die Bewegungsgleichungen in Matrixform:
$$\ddot{\vec{x}} + \hat{A}\vec{x} = 0 \tag{34}$$
mit $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix}$. Durch den Ansatz:
$$\vec{x} = acos(\omega t + \alpha)\vec{u} \tag{35}$$
reduziert sich das Problem auf das Eigenwertproblem:
$$\hat{A}\vec{u} = \omega^2\vec{u} \tag{36}$$
   i) Bestimmen Sie die zwei Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2, bei denen die Gleichung (36) nichttriviale Lösungen $\vec{u} \neq \vec{0}$ hat.
   ii) Finden Sie dazugehörige, normierte Eigenvektoren $\vec{u}^{(1)}$ und $\vec{u}^{(2)}$.
   iii) Diskutieren Sie die Art der kollektiven Bewegung der Teilchen, falls die Mode ω_1 bzw. ω_2 angeregt ist.

   Hinweis: Die Gleichung (36) hat nicht-triviale Lösungen bei $\omega = \omega_l$, wenn ω_l die Lösung der Gleichung:
$$det(\hat{A} - \omega_l^2 \mathbb{1}) = 0 \tag{37}$$
ist. Die Eigenvektoren erhält man dann aus der Gleichung:
$$\hat{A}\vec{u}^{(l)} = \omega_l^2 \vec{u}^{(l)} \tag{38}$$

3. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen lautet:
$$\vec{x} = a_1 cos(\omega_1 t + \alpha_1)\vec{u}^{(1)} + a_2 cos(\omega_2 t + \alpha_2)\vec{u}^{(2)} \tag{39}$$
Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit folgenden Anfangsbedingungen:
$$\vec{x}(0) = \vec{0} \qquad \dot{\vec{x}}(0) = (v_1^{(0)}, 0)^T \tag{40}$$
und skizzieren Sie $x_2(t)$.

   Hinweis: Verwenden Sie die Orthogonalität der Eigenvektoren.

Lösung:

1. Nach dem Hookeschen Gesetz üben die Federn auf die beiden Teilchen die Kräfte (F_i bezeichnet die Gesamtkraft auf das i-te Teilchen) aus:

$$\begin{aligned} F_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ F_2 &= -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{aligned} \tag{41}$$

   Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus dem newtonschen Axiom $F_i = ma_i$:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{aligned} \tag{42}$$

   Die Ersetzung $k = m\omega_0^2$ und Neuordnung der Terme liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 \\ 0 &= \ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 \end{aligned} \tag{43}$$

2. Mit $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$ und $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix}$ ergibt sich die gegegebene Matrixform:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}} &= +\hat{A}\vec{x} = \vec{0} \\ -\alpha\omega^2 cos(\omega t + \alpha)\vec{u} + acos(\omega t + \alpha)\hat{A}\vec{u} &= \vec{0} \\ -\omega^2 \vec{\mathbb{1}}\vec{u} + \hat{A}\vec{u} &= \vec{0} \\ (\hat{A} - \omega^2 \vec{\mathbb{1}})\vec{u} &= \vec{0} \end{aligned} \tag{44}$$

   wobei wir den Ansatz $\vec{x} = acos(\omega t + \alpha)\vec{u}$ eingesetzt haben.

   i) Ein lineares Gleichungssystem (44) hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante der Matrix verschwindet:

$$\begin{aligned} det(\hat{A} - \omega\vec{\mathbb{1}}) &= 0 \\ (2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\omega_0^2)^2 &= 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)(3\omega_0^2 - \omega^2) &= 0 \end{aligned} \tag{45}$$

   Damit ist gezeigt, dass nichttriviale Lösungen existieren, falls:

$$\omega^2 = \omega_1^2 = \omega_0^2 \qquad \omega^2 = \omega_2^2 = 3\omega_0^2 \tag{46}$$

ii) Zur Bestimmung des jeweils zugehörigen Eigenvektors verwenden wir die definierende Eigenschaft:

$$\hat{A}\vec{u}^{(l)} = \omega_l^2 \vec{u}^{(l)} \tag{47}$$

Da Vielfache eines Eigenvektors stets auch Eigenvektoren sind, muss dieses Gleichungssystem überbestimmt sein. Es genügt daher, die erste Komponente zu lösen und schließlich eine geeignete Normierung zu wählen:

$$\begin{aligned}
\omega_1 : \qquad & 2\omega_0^2 u_1^{(1)} - \omega_0^2 u_2^{(1)} = \omega_0^2 u_1^{(1)} \\
& u_1^{(1)} = u_2^{(1)} \\
& \vec{u}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T \\
\omega_2 : \qquad & 2\omega_0^2 u_1^{(2)} - \omega_0^2 u_2^{(2)} = 3\omega_0^2 u_1^{(2)} \\
& u_1^{(1)} = -u_2^{(2)} \\
& \vec{u}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T
\end{aligned} \tag{48}$$

iii) Bei der Anregung der Mode ω_1 schwingen die Teilchen synchron mit gleichen Phasen und Amplitden, der Abstand zwischen den Teilchen bleibt konstant. Bei der Anregung der Mode ω_2 schwingen die Teilchen mit gleichen Amplituden aber gegenphasig.

3. Da es zwei unterschiedliche, einfach Eigenwerte gibt, sind die beiden Eigenvektoren orthogonal. Es gilt:

$$\vec{u}^{(l)} \cdot \vec{x}(t) = a_l cos(\omega_l t + \alpha_l) \qquad \vec{u}^{(l)} \cdot \dot{\vec{x}}(t) = -\omega_l a_l sin(\omega_l t + \alpha_l) \tag{49}$$

Das dies für alle t gilt, können wir t = 0 setzen und die Parameter a_l und α_l mit Hilfe der Anfangsbedingungen bestimmen. Für die erste Mode erhalten wir:

$$\begin{aligned}
0 = \vec{u}^{(1)} \cdot \vec{x}(0) = a_1 cos(\alpha_1) \qquad & \frac{v_1(0)}{\sqrt{2}} = \vec{u}^{(1)} \cdot \dot{\vec{x}}(0) = -\omega_1 a_1 sin(\alpha_1) \\
\alpha_1 = \pm\frac{\pi}{2} \qquad & a_1 = \mp\frac{v_1(0)}{\sqrt{2}\omega_1}
\end{aligned} \tag{50}$$

Wegen der Identität $\mp cos(x \pm \frac{\pi}{2}) = sin(x)$ kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets das untere Vorzeichen ($\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}, a_1 = \frac{v_1(0)}{\sqrt{2}\omega_1}$) gewählt werden. Für die zweite Mode erhalten wir analog:

$$\begin{aligned}
0 = \vec{u}^{(2)} \cdot \vec{x}(0) = a_2 cos(\alpha_2) \qquad & \frac{v_1(0)}{\sqrt{2}} = \vec{u}^{(2)} \cdot \dot{\vec{x}}(0) = -\omega_2 a_2 sin(\alpha_2) \\
\alpha_2 = -\frac{\pi}{2} \qquad & a_2 = \frac{v_1(0)}{\sqrt{2}\omega_2}
\end{aligned} \tag{51}$$

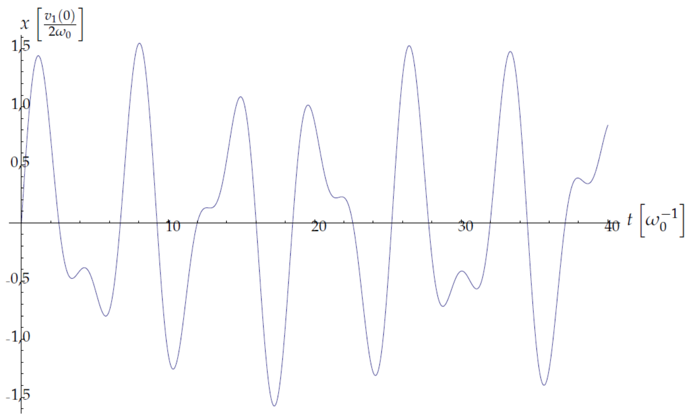
Die spezielle Lösung, die die Anfangsbedingungen erfüllt, lautet also:

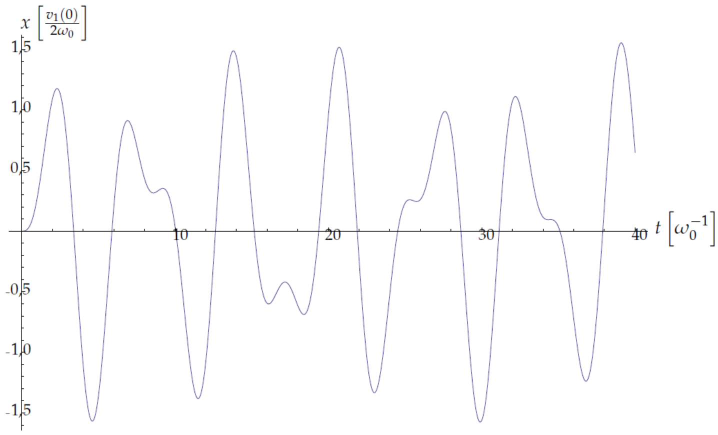
$$\vec{x} = \frac{v_1(0)}{\sqrt{2}\omega_0}\left(sin(\omega_0 t)\vec{u}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}sin(\sqrt{3}\omega_0 t)\vec{u}^{(2)}\right) \tag{52}$$

oder in Komponenten:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{v_1(0)}{2\omega_0}\left(sin(\omega_0 t) + \frac{1}{\sqrt{3}}sin(\sqrt{3}\omega_0 t)\right) \\ x_2(t) &= \frac{v_1(0)}{2\omega_0}\left(sin(\omega_0 t) - \frac{1}{\sqrt{3}}sin(\sqrt{3}\omega_0 t)\right) \end{aligned} \tag{53}$$

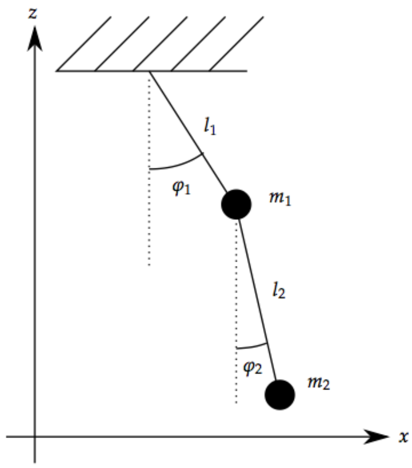
Die Skizzen zeigen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.





5 Doppelpendel

Betrachten Sie ein ebenes Doppelpendel, dessen Punktmassen m_1 und m_2 dem homogenen Schwerefeld ausgesetzt sind. Betrachten Sie die Auslenkungswinkel φ_1 und φ_2 als generalisierte Koordinaten. Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems auf. Betrachten Sie nun den Fall kleiner Auslenkungen $|\varphi_1|, |\varphi_2| \ll 1$.



1. Zeigen Sie, dass sich die Lagrange-Funktion auf die Form:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g l_1 \varphi_1^2 - \frac{1}{2}m_2 g l_2 \varphi_2^2 + (m_1 + m_2)g l_1 + m_2 g l_2 \tag{54}$$

   reduziert.

   Hinweis: Für $|x| \ll 1$ gilt $cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

2. Formulieren Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Winkel φ_1 und φ_2.

3. Mit dem Auslenkungsvektor $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ erhält man die Bewegungsgleichungen in Matrixform:

$$\hat{M}\ddot{\vec{\varphi}} + \hat{A}\vec{\varphi} = 0 \tag{55}$$

   Bestimmen Sie die Matrizen $\hat{M}$ und $\hat{A}$.

4. Durch den Ansatz:

$$\vec{\varphi} = a cos(\omega t + \alpha)\vec{u} \tag{56}$$

   reduziert sich das Problem auf das generalisierte Eigenwertproblem:

$$\hat{A}\vec{u} = \omega^2 \hat{M}\vec{u} \tag{57}$$

Bestimmen Sie die zwei Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2, bei denen (57) nicht-triviale Lösungen ($\vec{u} \neq 0$) hat.

Hinweis: Gleichung (57) hat nicht-trivivale Lösungen bei $\omega = \omega_l$, wenn ω_l die Gleichung:

$$det(\hat{A} - \omega_l^2 \hat{M}) = 0 \tag{58}$$

erfüllt. Die Eigenvektoren erhält man dann aus $\hat{A}\vec{u}^{(l)} = \omega_l^2 \hat{M}\vec{u}^{(l)}$. Im zweidimensionalen Fall gilt:

$$det(\hat{A} - \omega^2 \hat{M}) = \omega^4 det(\hat{M}) - \omega^2 c + det(\hat{A}) \tag{59}$$

wobei $c = A_{11}M_{22} + A_{22}M_{11} - A_{12}M_{21} - A_{21}M_{12}$ ist. Damit folgt:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4det(\hat{M})det(\hat{A})}}{2det(\hat{M})} \tag{60}$$

Lösung:

Wir betrachten die ebene Bewegung der Teilchen und wählen das Koordinatensystem so, dass die Bewegung vollständig in der x-z-Ebene verläuft, d.h. $y_1 = y_2 = 0, \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$. Wir bezeichnen die Koordinaten des ersten bzw. zweiten Teilchens mit den Indizes x_1, z_1 bzw. x_2, z_2. Die Lagrange-Funktion des Systems lautet in diesen Koordinaten:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) + m_1 g z_1 + m_2 g z_2 \tag{61}$$

wobei die Variablen die folgenden Zwangsbedingungen:

$$x_1^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0 \qquad (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_2^2 = 0 \tag{62}$$

erfüllen müssen. Durch Einführen der generalisierten Koordinaten φ_1 mit:

$$x_1 = l_1 sin\varphi_1 \qquad z_1 l_1 cos\varphi_1 \tag{63}$$

und φ_2 mit:

$$x_2 = x_1 + l_2 sin\varphi_2 \qquad z_2 = z_1 + l_2 cos\varphi_2 \tag{64}$$

sind die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt. Die Lagrange-Funktion in diesen generalisierten Koordinaten lautet:

$$\begin{aligned} L = &\frac{1}{2}m_1((l_1\dot{\varphi}_2 cos\varphi_1)^2 + (-l_1\dot{\varphi}_1 sin\varphi)^2) + \frac{1}{2}m_2(l_1\dot{\varphi}_1 cos\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2 cos\varphi_2)^2 \\ &+ \frac{1}{2}m_2(-l_1\dot{\varphi}_1 sin\varphi_1 - l_2\dot{\varphi}_2 sin\varphi_2)^2 + (m_1 + m_2)g l_1 cos\varphi_2 + m_2 g l_2 cos\varphi_2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 k_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &+ (m_1 + m_2)g l_1 cos\varphi_2 + m_2 g l_2 cos\varphi_2 \end{aligned} \tag{65}$$

1. Im Falle kleiner Auslenkungen ($|\varphi_1|, |\varphi_2| \ll 1$) entwickelt man die Lagrange-Funktion bis auf quadratische Terme, sodass:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g l_1 \varphi_1^2 - \frac{1}{2}m_2 g l_2 \varphi_2^2 \tag{66}$$

2. Im Rahmen dieser Näherung erhalten wir die linearisierten Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2)g l_1 \varphi_1 = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 g l_2 \varphi_2 = 0 \end{aligned} \tag{67}$$

3. Mit dem Auslenkvektor $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ und den Matrizen:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \tag{68}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)g l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{pmatrix} \tag{69}$$

lässt sich das System von Differentialgleichungen in der kompakten Form:

$$\hat{M}\ddot{\vec{\varphi}} + \hat{\vec{\varphi}} = 0 \tag{70}$$

schreiben.

4. Entsprechend des Hinweises erhalten wir:

$$c = (m_1 + m_2)m_2 g(l_1 + l_2)l_2 l_2 \tag{71}$$

$$det\hat{M} = m_1 m_2 l_1^2 L_2^2 \qquad det\hat{A} = (m_1 + m_2)m_2 g^2 l_1 l_2 \tag{72}$$

Damit ergeben sich die Eigenfrequenzen des Systems zu:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)g}{2m_1 l_1 l_2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m_1 l_1 l_2}{(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)^2}}\right) \tag{73}$$

Im Grenzfall $m_2 \ll m_1$ ergeben sich näherungsweise die Eigenfrequenzen zweier unabhängiger Pendel:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l_{1,2}} \tag{74}$$