Merlin Mitschek, Verena Walbrecht

Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Sommer 2013

Vorlesung 4

PHYSIK
DEPARTMENT

Inhaltsverzeichnis

1 Kinematik starrer Körper

1.1 Massendichte

Unter einem starren Körper versteht man ein System mit festen Abständen zwischen zwei beliebigen Teilchen oder Massenelementen.
Die Massendichte eines solchen Körpers definiert sich wie folgt:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}\right) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m(\boldsymbol{r})}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \tag{1}$$

Hieraus ergibt sich für die Gesamtmasse:

$$M = \int d^3r\, \rho(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

1.2 Bezugssysteme und Kinematik

Man geht von zwei Koordinatensystemen aus. Einem Raumfesten (R-System) und einem Körperfesten (K-System). Der Vektor $\boldsymbol{R}_0$ verbindet die beiden Koordinaten-Nullpunkte. (Oft wählt man als Verbindungsvektor den Schwerpunktsvektor $\boldsymbol{R}_0 = \frac{1}{M} \int d^3r\, \boldsymbol{r}\, \rho(\boldsymbol{r})$)

Für die Translationsgeschwindigkeit des K-Systems gegenüber des R-Systems erhält man:

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_0(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

Weiterhin ergibt sich für die Drehbewegung relativ zum R-System:

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{4}$$

Somit erhält man die Geschwindigkeit des starren Körpers, welche sich aus Translation und Rotation zusammensetzt:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{5}$$

1.3 Lagrange-Funktion

Um die Lagrange-Funktion aufzustellen muss die kinetische Energie näher untersucht werden. Hierzu betrachtet man zunächst ein System von starr miteinander verbundenen Massenpunkten. Für die kinetische Energie ergibt sich:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)^2 = \frac{1}{2} M \boldsymbol{V}^2 + \sum_i \left(m_i \boldsymbol{v}_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) + \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)^2 \right) \tag{6}$$

Legt man das K-System ins Schwerpunktssystem dann gilt, dass $\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i = 0$ wodurch der zweite Term verschwindet. Zusammengefasst ergibt sich dann für die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} M\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i [\omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega r}_i)^2] \tag{7}$$

Die kinetische Energie stezt sich also aus Translations- und Rotationsenergie zusammen. Im K-System kann man den Term $\omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\omega r})^2$ wie folgt darstellen:

$$\omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega r}_i)^2 = \sum_{\alpha,\beta} \omega_\alpha \omega_\beta \, [r^2 \delta_{\alpha,\beta} - x_\alpha x_\beta] \tag{8}$$

Es definiert sich der Trägheitstensor wie folgt:

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, [r^2 \delta_{\alpha,\beta} - x_\alpha x_\beta]_i \tag{9}$$

Damit ergibt sich insgesamt für die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} M\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} \, \omega_\alpha \omega_\beta \tag{10}$$

Für eine kontinuerliche Massenverteilung ist der Trägheitstensor:

$$I_{\alpha\beta} = \int d^3r \, \rho(\boldsymbol{r}) \, [r^2 \delta_{\alpha,\beta} - x_\alpha x_\beta] = \int d^3r \, \rho(\boldsymbol{r}) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Der Trägheitstensor ist eine symmetrische Matrix. Durch die Wahl eines geeigneten (orthogonalen) Koordinatensystem lässt sich jede symmetrische Matrix auf Diagonalform bringen. Damit erhält man für die Rotationsenergie:

$$T_{rot} = \sum_{i=1}^{N} I_i \omega_i^2 \tag{12}$$

Man unterscheidet zwischen:

- unsymmetrische Kreisel $I_1 \neq I_2 \neq I_3$
- symmetrische Kreisel $I_1 = I_2 \neq I_3$
- Kugelkreisel $I_1 = I_2 = I_3$

Somit erhält man die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2} M\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} \, \omega_\alpha \omega_\beta - U \tag{13}$$

1.4 Der Steinersche Satz

Mit dem Steinerschen Satz kann man Trägheitsmomente eines Körpes bezüglich einer Drehache bestimmen, die nicht durch den Schwerpunkt führt. a ist die Strecke zwischen Drehachse und Schwerpunkt.

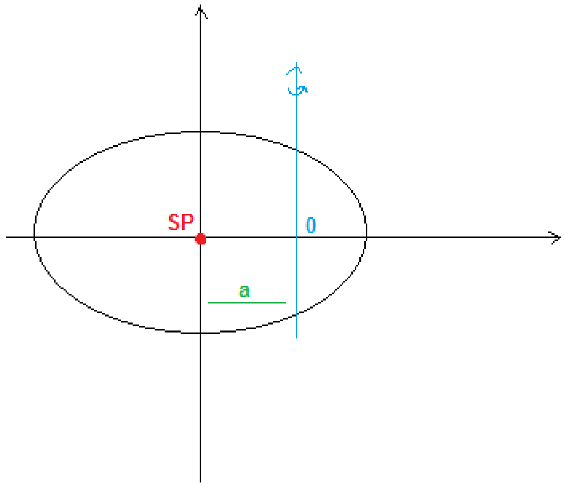

Abbildung 1: Drehung um Drehache, welche nicht durch den Schwerpunkt verläuft

Der Trägheitstensor ist dann:

$$I'_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} + M(a^2\delta_{\alpha,\beta} - a_\alpha a_\beta) \quad \text{(Steinersche Satz)} \tag{14}$$

1.5 Drehimpuls

Der Drehimpuls eines starren Körpers ist:

$$\boldsymbol{l} = \int d^3r\, \rho(\boldsymbol{r})\, (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = \hat{I}\boldsymbol{\omega} \tag{15}$$

mit dem Drehmoment:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} \tag{16}$$

Hiermit kann die Rotationsenergie wie folgt geschrieben werden:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\omega_\alpha l_\alpha = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\omega} \tag{17}$$

(mit $l_\alpha = \sum_\beta I_{\alpha\beta}\omega_\beta$)

1.6 Bewegungsgleichung

Ausgehend von der Lagrange-Funktion $L = \frac{1}{2}M\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta}\ \omega_\alpha\omega_\beta - U(\boldsymbol{R},\boldsymbol{\varphi})$ kann man die Bewegungsgleichungen für Translation und Rotation aufstellen.

Es ergibt sich für die Translation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{V}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{R}} \quad \Rightarrow \quad M\dot{\boldsymbol{V}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F} \tag{18}$$

Falls $\boldsymbol{R}$ zyklisch ist, ist $M\boldsymbol{V} = \boldsymbol{P} = \text{const.}$

Für die Rotation erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \omega_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \omega_\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_\beta I_{\alpha\beta}\omega_\beta = \frac{\mathrm{d}l_\alpha}{\mathrm{d}t}\ ;\ \frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi_\alpha} = M_\alpha \tag{19}$$

1.7 Die Eulerschen Kreiselgleichungen

Im folgenden soll auf die Eulerschen Kreiselgleichungen eingegangen werden. Bei ihnen handelt es sich um Bewegungsgleichungen für die Rotation eines starren Körpers.
Es gilt folgendes:

1. Betrachtet man einen festen Vektor im K-System, so ist die Geschwindigkeit der Rotationsbewegung im R-System:
   $\boldsymbol{v} = (\dot{\boldsymbol{r}})_R = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
2. Gibt es zusätzlich eine Geschwindigkeit im K-System:
   $(\boldsymbol{v})_R = (\boldsymbol{v})_K + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
3. Die Verallgemeinerung auf einen beliebigen Vektor$\boldsymbol{A}$:
   $\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)_R = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)_K + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A}$
4. Insbesondere gilt dies für den Drehimpuls l:
   $\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}\right)_R = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}\right)_K + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{l}$

Nun betrachte man ein Bezugssystem, in dem der Trägheitstensor auf die Hauptachsen transformiert ist (also diagonalisiert ist), dann gilt:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}\right)_R = \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} I_1\dot{\omega}_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_2 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_2 \omega_2 \\ \omega_3 I_1 \omega_1 - \omega_1 I_3 \omega_3 \\ \omega_1 I_2 \omega_2 - \omega_2 I_1 \omega_1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Daraus folgen die Eulerschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 &= M_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_3\omega_1 &= M_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2 &= M_3 \end{aligned} \tag{21}$$

2 Schwingungen

2.1 Freie eindimensionale Schwingungen

Gegeben sei ein Potential $U(q)$. In der Gleichgewichtslage bei $q = q_0$ gilt $U'(q_0) = 0$.
Man betrachte nun kleine Auslenkungen $x = q - q_0$ aus der Gleichgewichtslage. Hierzu entwickle man das Potential um q_0 bis zur 2. Ordnung:

$$U(q) = U(q_0) + \underbrace{U'(q_0)(q - q - 0)}_{=0} + \frac{1}{2}U''(q_0)(q - q_0)^2 + ... \tag{22}$$

Somit gilt für kleine Auslenkungen von x:

$$U(x) = U_0 + \frac{k}{2}x^2 \quad \text{mit} \quad k = U''(q_0) \quad \text{und} \quad U_0 = U(q_0) \tag{23}$$

Weiterhin ist die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 \quad \text{mit} \quad a(q_0) = m : \quad T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{24}$$

Also ist die Lagrange-Funktion eines eindimensionalen harmonischen Ozillators:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 - U_0 \tag{25}$$

Und damit folgt die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{26}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = a\ \cos(\omega t + \alpha) \quad \left(a = \sqrt{A^2 + B^2}\ ;\ \tan(\alpha) = -\frac{B}{A}\right) \tag{27}$$

2.2 Schwingungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden

Unter Verwendung von verallgemeinerten Koordinaten $q = \{q_1, ..., q_s\}$ ist die potentielle Energie: $U(q_1, ..., q_s)$. Diese besitzt ein Minimum bei $q_i = q_i^{(0)}$.
Man betrachte wieder Auslenkungen um die Gleichgewichtslage $x_i = q_i - q_i^{(0)}$. Die Entwicklung um das Minimum ($x_i^{(0)} = 0$) ist:

$$U = U_0 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}x_i x_j \quad \text{mit} \quad k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \tag{28}$$

Die kinetische Energie ist:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \approx \frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij}(q^{(0)})\dot{q}_i\dot{q}_j \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\sum_{ij} m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j \quad \text{mit} \quad m_{ij} = a_{ij}(q^{(0)}) \tag{29}$$

Damit erhält man die Lagrange-Gleichung:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left\{m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j\right\} - U_0 \tag{30}$$

Es ergibt sich ein System von S linearen, gekoppelten homogenen Differentialgleichungen:

$$\sum_j (m_{ij}\ddot{x}_j + k_{ij}x_j) = 0 \tag{31}$$

Der Ansatz zur Lösung dieser Gleichung ist:

$$x_j(t) = C_j e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \sum_j (k_{ij} - \omega^2 m_{ij})C_j = (\mathcal{K} - \lambda\,\mathcal{M})\,C = 0 \tag{32}$$

Die Bedingung, dass Lösungen für C existieren ist:

$$\det(\mathcal{K} - \lambda\,\mathcal{M}) = 0 \tag{33}$$

Man erhält die charakteristische Gleichung, deren Lösungen ω_α ($\alpha = 1, ..., S$) die Eigenfrequenzen des Systems sind.
Durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(\mathcal{K} - \lambda_\alpha\,\mathcal{M})\,C_\alpha = 0$ erhält man S Eigenschwingungen C_α zu den Eigenfrequenzen. Somit erhält man die allgemeine zeitabhängige Lösung:

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{\alpha=1}^{S} C_\alpha(A_\alpha\cos(\omega_\alpha t) + B_\alpha\sin(\omega_\alpha t)) \tag{34}$$

3 Grundlagen der Hamiltonschen Mechanik

3.1 Die Hamilton Funktion

Die Hamilton Funktion ist wie folgt definiert:

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \tag{35}$$

Sie beschreibt die Gesamtenergie des Systems:

$$H(p, q, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - T + U = T + U = E \tag{36}$$

Durch Anwenden der Legendre-Transformation $\mathcal{L}$ kann man zwischen der Lagrange-Funktion und der Hamilton-Funktion transformieren. Für eine beliebige Funktion f ist die Legendre-Transformation wie folgt definiert:

$$(\mathcal{L}f)(x) = x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - f(x) \tag{37}$$

3.2 Hamiltonsche Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichungen der Hamiltonschen Mechanik sind die kanonischen Gleichungen:

$$q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \tag{38}$$

Diese 2 S Differentialgleichungen 1. Ordnung folgen aus den Lagrangegleichungen und können damit die S Differentialgleichungen 2. Ordnung vollständig ersetzen.

3.3 Energieerhaltungssatz

Ist die Hamilton- Funktion H nicht explizit von der Zeit abhängig, so ist die Energie eine Erhaltungsgröße.

$$\frac{\mathrm{d}H(p, q, t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{39}$$

Damit folgt, dass:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(T + U)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{40}$$

falls H nicht explizit von der Zeit abhängig ist.