Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Sommer 2013

Übung 3 - Angabe

PHYSIK
DEPARTMENT

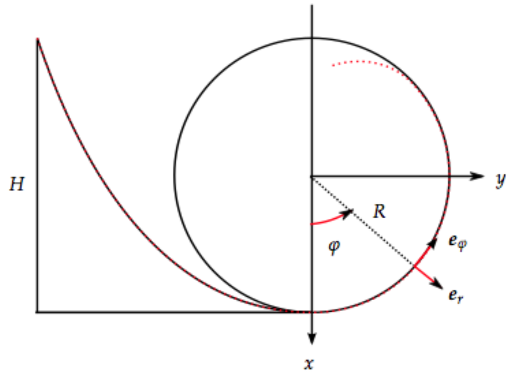
1 Zweiteilchenproblem im Lagrange-Formalismus

Betrachten Sie ein System aus zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2, die unter dem Einfluss eines Potentials $V(\vec{r})$ stehen, welches nur vom Relativvektor $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ der beiden Teilchen abhängt.

1. Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2)$ des Systems auf.
2. Führen Sie den Relativvektor $\vec{r}$ und den Schwerpunktsvektor $\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$, also verallgemeinerte Koordinaten, ein und bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen.

2 Achterbahn

Der Wagen einer Achterbahn gleitet aus dem Stand reibungslos von der Anfangshöhe H in den kreisförmigen Looping mit Radius R.



1. Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen
   i) in Polarkoordinaten unter der Zwangsbedingung $R - r = 0$ und bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ mithilfe des Energieerhaltungssatzes.
   ii) im mit dem Wagen verbundenen Bezugssystem mit der x'-Achse senkrecht zur Bahn. Bestimmen Sie die Zwangskraft.

   Hinweis: Wählen Sie den Koodinatenursprung im Zentrum des Kreises und geben Sie nur die Bewegungsgleichung für die x'-Komponente an.
2. Bestimmen Sie für $H = 2R$ die Höhe h_{max}, bei der der Wagen den Bahnkontakt verliert.

   Hinweis: Der Kontakt geht verloren, wenn die Zwangskraft nach außen gerichtet wäre.
3. Betrachten Sie nun den Fall $H > 2R$. Bestimmen Sie die Höhe h_{min}, die mindestens nötig ist, um den Wagen immer auf der Bahn zu halten.

3 Zwangskräfte

Ein Massepunkt der Masse m bewege sich in der x-z-Ebene im homogenen Schwerefeld der Erde ($\vec{F} = -mg\vec{e}_z$), unter der Zwangsbedingung:

$$f(x,z) = \frac{x^2}{2} + bz = 0 \tag{1}$$

1. Die Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen 1.Art) für den Bahnvektor $\vec{r}(t) = (x(t), z(t))^T$ lauten:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}^* = -mg\vec{e}_z + \lambda\vec{\nabla}f \tag{2}$$

   Bestimmen Sie den Lagrange-Multiplikator λ als Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten mittels der Bewegungsgleichungen und der Zwangsbedingung.

2. Eliminieren Sie λ aus den Bewegungsgleichungen.

3. Für welche Wahl des Parameters b verschwindet die Zwangskraft $\vec{F}^* = \lambda\vec{\nabla}f$? Interpretieren Sie dieses Ergebnis!

4 Verallgemeinerte Koordinaten

An den Enden einer masselosen Stange der Länge l sitzen zwei gleiche Massen m, die in Schienen längs der x- bzw. z-Achse gehalten werden. Es wirkt das homogene Schwerefeld. Die Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen 1.Art) für die Koordinaten $x_1(t), z_2(t)$ lauten:

$$m\ddot{x}_1 = 0 + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_1} \tag{3}$$

$$m\ddot{z}_2 = -mg + \lambda\frac{\partial f}{\partial z_2} \tag{4}$$

dabei gilt die Zwangsbedingung:

$$f(x_1, z_2) = x_1^2 + z_2^2 - l^2 = 0 \tag{5}$$

Mit der Einführung der verallgemeinerten Koordinate $\varphi(t)$:

$$x_1(t) = lsin\varphi(t) \qquad z_2(t) = -lcos\varphi(t) \tag{6}$$

lässt sich die Zwangsbedingung automatisch erfüllen.

1. Drücken Sie die Bewegungsgleichungen durch die neue Variable φ aus.

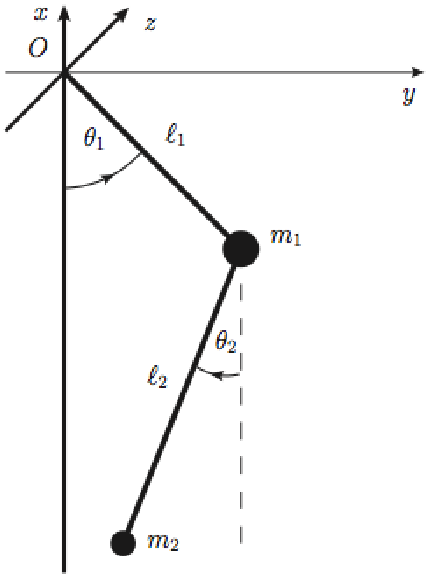
2. Eliminieren Sie den Lagrange-Multiplikator λ aus den Bewegungsgleichungen und finden Sie die Bewegungsgleichung für den Winkel φ.

3. Lösen Sie die Bewegungsgleichung im Falle kleiner Winkel $\varphi \ll 1$.

Hinweis: $sinx \approx x$ für $x \ll 1$

5 Ebenes Doppelependel

Betrachten Sie ein ebenes Doppelpendel im homogenen Schwerefeld der Erde im dreidimensionalen Raum. Der Aufhängepunkt befinde sich im Ursprung O. Die Positionen der Massenpunkte mit den Massen m_1 und m_2 werden beschrieben durch die Vektoren $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.



1. Zeigen Sie, dass es für dieses System vier holonome Zwangsbedingungen gibt und schreiben Sie diese auf. Wie viele unabhängige Freiheitsgrade bleiben dem System folglich? Geben sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten an.

2. Drücken Sie die kinetische Energie T des Systems durch die verallgemeinerten Koordinaten aus und schrieben Sie diese mithilfe der Matrix $A = (a_{ij})_{\{i,j\}}$ als:

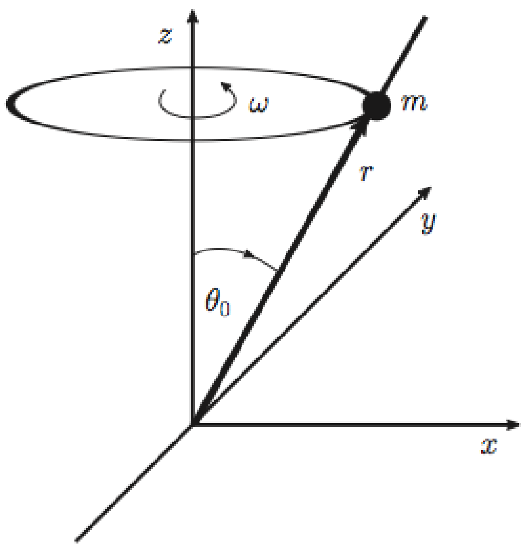
$$t = \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{7}$$

   Geben Sie A an.

3. Drücken Sie schließlich die potentielle Energie U des Systems durch die verallgemeinerten Koordinaten aus.

6 Rotierendes Teilchen in drei Dimensionen

Ein Teilchen der Masse m wird durch eine Zwangskraft auf einer Stange gehalten, auf der es sich reibungsgrei bewegen kann. Die Stange rotiere in einem festen Winkel ϑ_0 zur z-Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Es wirken keine weiteren Kräfte.



1. Wie lautet die Lagrangefunktion?

2. Geben Sie die Bewegungsgleichung an und lösen Sie diese mit den Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$ und $\dot{r}(0) = 0$.

3. Nun befinde sich das Teilchen unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes $(0, 0, -g)^T$ der Erde.
   Geben Sie die Lagrangefunktion an.

4. Lösen Sie die Bewegungsgleichung bei Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$ und $\dot{r}(0) = 0$.

5. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis in Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{r_0\omega^2}{g}$.