Merlin Mitschek, Verena Walbrecht

Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Sommer 2013

Vorlesung 3

Inhaltsverzeichnis

1 Symmetrien und Erhaltungssätze

In der Theoretischen Physik spielen Symmetrien oftmals eine wichtige Rolle. Unter Symmetrie versteht man die Invariaz der Lagrange-Funktion unter Symmetrie-Transformationen, wie Rotation oder Translation.

1.1 Zyklische Koordinaten

Eine Koordinate q_k wird als zyklisch bezeichnet, wenn sie nicht in der Lagrange-Funktion auftritt:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_k = \dot{p}_k = 0 \tag{1}$$

Hieraus folgt, dass der verallgemeinerte Impuls $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ eine Erhaltungsgröße ist, da seine Ableitung Null ergibt.

1.2 Impulserhaltungssatz

In einem System von N-Teilchen soll die Schwerpunktsbewegung betrachtet werden. Die Lagrange-Funktion im Schwerpunktssystem lautet:

$$L(\dot{\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{r}'_i, \dot{\boldsymbol{r}}'_i) = \frac{M}{2}\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}'^2_i - \sum_{i<j} U(\boldsymbol{r}_i' - \boldsymbol{r}_j') \tag{2}$$

Durch Differenzieren nach $\boldsymbol{R}$ stellt man fest, dass die Schwerpunktskoordinate zyklisch ist, also ist der verallgemeinerte Impuls:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P} = M\ddot{\boldsymbol{R}} = \text{const.} \tag{3}$$

eine Erhaltungsgröße.

1.3 Homogenität des Raumes (Translationsinvarianz)

Unter Homogenität des Raumes versteht man die Invarianz der Lagrange-Funktion L unter der Transformation:

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = L(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{a} = \text{const.} \tag{4}$$

Entwickelt man die Lagrange-Funktion bis zur 1. Ordnung, erhält man:

$$L(\boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{a}, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t) = L(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t) + \sum_i \boldsymbol{a}\nabla_i L(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t) + ... \tag{5}$$

Durch Nachrechen stellt man fest, dass:

$$\sum_i \boldsymbol{\nabla}_i L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} = 0 \tag{6}$$

Also sind die verallgemeinerten Impulse zyklische Koordinaten, was impliziert, dass der Gesamtimpuls:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P} = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = const \tag{7}$$

eine Erhaltungsgröße ist.

Allgemein impliziert die Homogenität des Raumes die Impulserhaltung und umgekehrt.

1.4 Homogenität der Zeit und Energieerhaltung

Die Invarianz der Lagrange-Funktion unter Zeit-Translation wird als Homogenität der Zeit bezeichnet, d.h.

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t + \tau) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\tau} \ \text{ beliebig} \tag{8}$$

Da die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt ist die 1. Ordnung der Taylorentwicklung Null. Deshalb bildet man die totale Zeitableitung:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_i \dot{q}_i p_i \right) \tag{9}$$

Hieraus folgt, dass:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_i \dot{q}_i p_i - L \right) = 0 \tag{10}$$

Da $\sum_i \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$ und $L = T - U$ erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_i \dot{q}_i p_i - L \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (2T - T + U) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (T + U) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E = 0 \tag{11}$$

Also ist die Energie erhalten, wenn die Lagrange-Funktion invariant unter Zeit-Transformationen ist und umgekehrt.

1.5 Isotropie des Raumes und Drehimpulserhaltung

Die Isotropie des Raumes bedeutet, dass die Lagrange-Funktion invariant unter Drehung um eine beliebige Raumachse ist, also:

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = L(\boldsymbol{r}_i + \Delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i + \Delta\boldsymbol{\varphi} \times \dot{\boldsymbol{r}}_i, t) \tag{12}$$

Bis zur 1- Ordnung entwickelt:

$$L(\boldsymbol{r}_i + \Delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i + \Delta\boldsymbol{\varphi} \times \dot{\boldsymbol{r}}_i, t) = L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} \Delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \Delta\boldsymbol{\varphi} \times \dot{\boldsymbol{r}}_i \right) + ... \tag{13}$$

Man erhält, dass:

$$\sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \dot{\boldsymbol{r}}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \right) \Delta\boldsymbol{\varphi} = 0 \tag{14}$$

Somit folgt, dass:

$$\sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} + \dot{\boldsymbol{r}}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{L} = 0 \tag{15}$$

Das bedeutet, dass der Drehimpuls erhalten ist. Also impliziert die Isotropie des Raumes Drehimpulserhaltung und umgekehrt.

2 Anwendungen der Lagrange-Mechanik

2.1 Zentralkräfte

Betrachtet werden zwei Massenpunkte m_1 und m_2, welche entlang ihrer Verbindungslinie durch eine Kraft F miteinander wechselwirken. Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \\ m_2\ddot{\boldsymbol{r}} &= -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}$.

Durch Mulitplikation der 1. Gleichung mit m_2 und der 2. Gleichung mit m_1, sowie Subtraktion der 2. von der 1.Gleichung, kann man unter der Einführung der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ das Zweiköperproblem auf eine Bewegungsgleichung reduzieren:

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{16}$$

Im Weiteren soll es sich um ein Zetralpotential handeln, also um ein Potential, dass nur vom Abstandsbetrag abhängt:

$$U(\boldsymbol{r}) = U(|\boldsymbol{r}|) = U(r) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}_r$$

Da es sich um ein Zentralpotential handelt, ist es von Vorteil Polarkoordinaten einzuführen. In ebenen Polarkoordinaten lässt sich die Geschwindigkeit wie folgt schreiben:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{17}$$

Somit ist die Lagrange-Funktion in den neuen Koordinaten gegeben durch:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2\boldsymbol{e}_r + r^2\dot{\varphi}^2\boldsymbol{e}_\varphi) - U(r) \tag{18}$$

Man stellt fest, dass φ nicht in L enthalten ist, also $\frac{\partial}{\partial\varphi}L = 0$. Dies bedeutet, dass φ eine zyklische Koordinate ist und damit ist der Drehimpuls $l := \frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}L = \mu r^2\dot{\varphi}$ eine Erhaltungsgröße ist.

Weiterhin kann man mit der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichung aufstellen:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = r\mu\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U(r)}{\partial r} - \mu\ddot{r} = 0 \tag{19}$$

mit $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$ erhält man:

$$\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\partial U(r)}{\partial r} = \mu\ddot{r} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)\right) = 0 \tag{20}$$

Die nun erhaltene Bewegungsgleichung lässt sich leicht durch Integration lösen. Der Teil in den Klammern wird als effektives Potential bezeichnet: $V(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)$

Je nach Form des effektiven Potentials ergeben sich unterschiedliche Bewegungstypen: Streuung(i), Gebundene Bewegung (ii) oder Fall ins Zentrum (iii). In den folgenden drei Abbildungen sind verschiedene effektive Potentiale mit den auftretenden Bewegungstypen dargestellt.

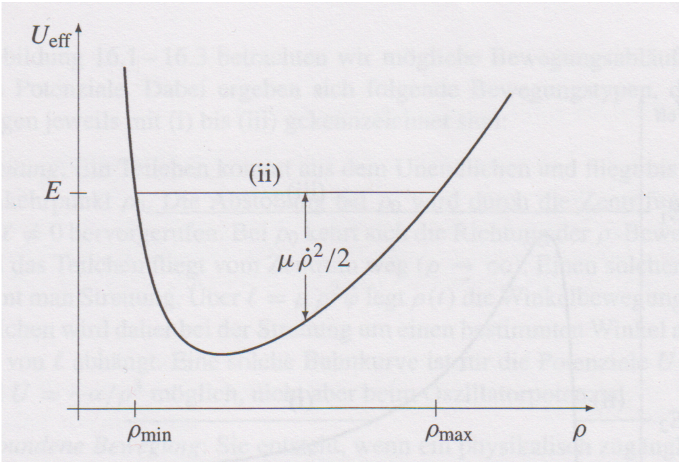

Abbildung 1: $V(\rho) = k\rho^2 + \frac{l^2}{2\mu\rho^2}$

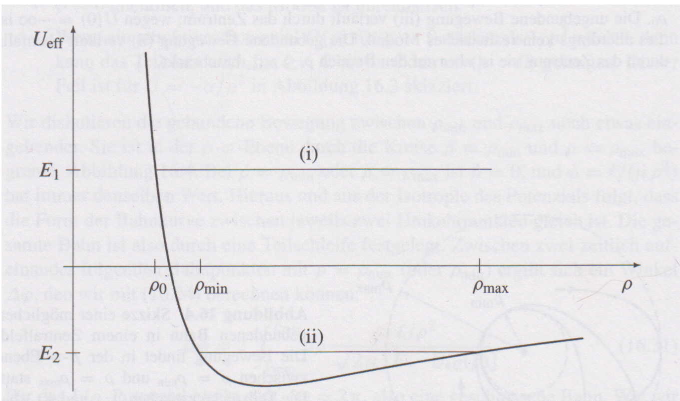

Abbildung 2: $V(\rho) = -\frac{k}{\rho} + \frac{l^2}{2\mu\rho^2}$

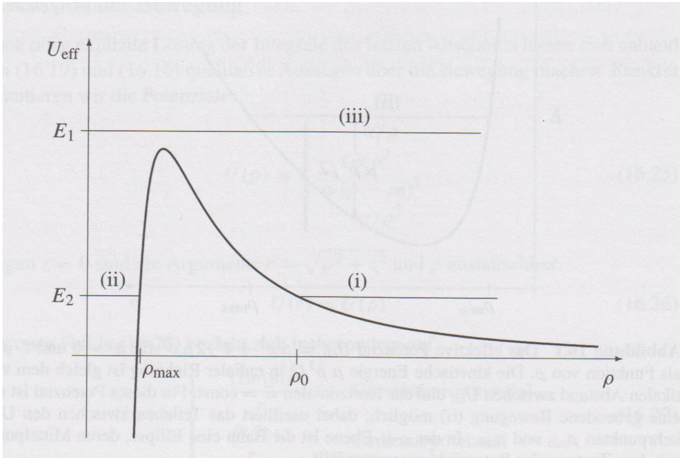

Abbildung 3: $V(\rho) = -\frac{k}{\rho^3} + \frac{l^2}{2\mu\rho^2}$

(Abbildung 1, 2 und 3 sind dem Lehrbuch von Torsten Fließbach, *„Mechanik - Lehrbuch zur Theoretischen Physik I"*; Spektrum-Verlag; 6.Auflage 2009; S.137 entnommen.)

2.2 Das Keplerproblem

Bei dem Kepler-Problem wird die Bewegung zweier Himmelskörper unter dem Einfluss der wechselseitigen Graviationskraft untersucht. Das Potential lautet wie folgt:

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} = -\frac{k}{r} \tag{21}$$

Das effektive Potential $V(r)$ lautet also dementsprechend:

$$V(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \tag{22}$$

Die radiale Bewegungsgleichung ist daher:

$$\mu\ddot{r} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}\right) = \mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{k}{r} = 0 \tag{23}$$

Aus dem vorherigen Kapitel ist bekannt, dass $\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{\mu r^2}$. Hieraus kann man nun ableiten, dass gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{l^2}{\mu^2 r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\right) \tag{24}$$

Mit Hilfe dieses Ausdrucks und der Substitution $z = \frac{1}{r}$ erhält man folgende Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + z = \frac{k\mu}{l^2} \tag{25}$$

Diese hat die Form der Differentialgleichung des harmonischen Ozillators. Die Lösung ist:

$$z = \frac{1}{r} = \frac{k\mu}{l^2}(\varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) + 1) \quad \Rightarrow \quad r(\varphi(t)) = \frac{l^2}{k\mu} \frac{1}{(\varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) + 1)} \tag{26}$$

ε wird als Exzentrizität bezeichnet. Führt man nun den Parameter $p = \frac{l^2}{k\mu}$ ein und setzt die Integrationskonstante $\varphi_0 = \pi$, dann bekommt man folgende Gleichung:

$$\frac{p}{r} = (\varepsilon \cos(\varphi) + 1) \tag{27}$$

welche Kegelschnitte beschreibt. Man erhält für verschieden Werte von ε :

- $\varepsilon > 1$: $E > 0$ Hyperbel
- $\varepsilon = 1$: $E = 0$ Parabel
- $\varepsilon < 1$: $E < 0$ Ellipse (speziell für $\varepsilon = 0$ ein Kreis)

Betrachtet man nun die gebundene Bewegung ($\varepsilon < 1$, $E < 0$ im attraktiven Potential ($p > 0$, $k > 0$) so kann man mit folgenden Substitutionen:

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}\ , \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}\ , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \quad \cos(\varphi) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

die Gleichung einer Ellipse mit den beiden Hauptachesen a und b erhalten:

$$\frac{(x + a\varepsilon^2)}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{28}$$

Maximaler und minimaler Abstand ergeben sich wie folgt:

$$r = r_{min} = r(\varphi = \pi): \quad r_{min} = \frac{l^2}{k\mu(1 + \varepsilon)} \quad \text{Perihel}$$

$$r = r_{max} = r(\varphi = 0): \quad r_{max} = \frac{l^2}{k\mu(1 - \varepsilon)} \quad \text{Aphel}$$

2.3 Dissipative Kräfte

In diesem Abschnitt werden äußere Krafte betrachtet, die aus einer konservativen Kraft und einer dissipativen Kraft zusammengesetzt sind, also:

$$\boldsymbol{F}^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{ext} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{kons} + \boldsymbol{F}_i^{diss} \tag{29}$$

mit $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}_i^{diss} \neq 0$.
In verallgemeinerten Koordinaten ergibt sich für die Kraft:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{ext} \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{kons} \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{diss} \frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + D_j \tag{30}$$

Und damit ergeben sich für die Lagrange-Gleichungen mit Einbeziehung dissipativer Kräfte:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = D_j \tag{31}$$

Beispiel:
Angenommen bei der dissipativen Kraft handle es sich um eine Reibungskraft der Form:
$\boldsymbol{F}_i^{diss} = a_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$
Dann sieht der Zusatzterm in den Lagrange-Gleichungen folgendermaßen aus:

$$D_j = -\sum_{i=1}^{N} a_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} a_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

Hierbei ist zu beachten, dass $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ nicht die verallgemeinerte Geschwindigkeit $\dot{q}_j$ darstellt sondern die wirkliche Teilchengeschwindigkeit ist.