Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Sommer 2013

Übung 2 - Lösung

PHYSIK
DEPARTMENT

1 Schräger Wurf

Ein Massepunkt der Masse m werde mit der Anfangsgeschwindigkeit

$$\vec{v}^{(0)} = (v_x^{(0)}, 0, v_z^{(0)})^T \tag{1}$$

im homogenen Schwerefeld der Erde vom Koordinatenursprung aus abgeworfen.

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für den Massepunkt auf und bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$.
2. Eliminieren Sie t aus der $x-$ und $z-$Komponente der Bahnkurve und diskutieren Sie die Spur $z(x)$.
3. Berücksichtigen Sie ab jetzt die zusätzliche Bedingung, dass der Massepunkt im Punkt $P = (x_1, 0, z_1)$ auftreffen soll.
4. Bestimmen Sie die Flugzeit des Massepunktes in Abhängigkeit des Betrags der Anfangsgeschwindigkeit $v^{(0)} = \left|\vec{v}^{(0)}\right|$ und des Abwurfwinkels $\psi^{(0)}$.
5. Wie hängt die anfängliche, kinetische Energie $T^{(0)}$ des Massepunktes vom Abwurfwinkel $\psi^{(0)}$ ab? Für welchen Abwurfwinkel ist $T^{(0)}$ minimal?

Lösung:

1. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus dem Newtonschen Gesetz:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \vec{F} = m\vec{a} = \begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Diese werden gelöst durch:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x^{(0)} + v_x^{(0)} t \\ y^{(0)} + v_y^{(0)} t \\ z^{(0)} + v_z^{(0)} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x^{(0)} t \\ 0 \\ v_z^{(0)} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

2. Eliminieren von t aus:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_x^{(0)} t \\ z(t) &= v_z^{(0)} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \tag{4}$$

liefert die Spur:

$$z(x) = \frac{v_z^{(0)}}{v_x^{(0)}} x - \frac{g}{2(v_x^{(0)})^2} x^2 \tag{5}$$

Die Spur stellt eine nach unten geöffnete Parabel dar.

3. Die Bedingung $z(x_1) = z_1$ eliminiert einen der beiden freien Paramter $v_x^{(0)}$ und $v_z^{(0)}$. Auflösen der Bedingung gibt:

$$\begin{aligned} v_x^{(0)} &= \frac{1}{2} v_z^{(0)} \frac{x_1}{z_1} \pm \frac{x_1}{z_1} \sqrt{\frac{1}{4}(v_z^{(0)})^2 - \frac{1}{2} g z_1} \\ v_z^{(0)} &= \frac{z_1}{x_1} v_x^{(0)} + \frac{1}{2} \frac{g x_1}{v_x^{(0)}} \end{aligned} \tag{6}$$

woraus man sieht, dass die kinetische Energie, die beim Abwurf in der vertikalen Bewegung steckt, mindestens gleich der potentiellen Energie an P_1 sein muss, um überhaupt eine Lösung zu haben. Der Abwurfwinkel ergibt sich zu:

$$tan\psi^{(0)} = \frac{v_z^{(0)}}{v_x^{(0)}} = \frac{z_1}{x_1} + \frac{1}{2} \frac{g x_1}{(v_x^{(0)})^2} \tag{7}$$

4. Die Flugzeit t_1 ergibt sich aus der Bewegung in x-Richtung, falls $x_1 > 0$:

$$t_1 = \frac{x_1}{v_x^{(0)}} = \frac{x_1}{v cos\psi^{(0)}} \tag{8}$$

5. Die anfängliche kinetische Energie ist:

$$T^{(0)} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{(v_x^{(0)})^2}{2cos^2\psi} = \frac{1}{4} \frac{m g x_1}{sin\psi cos\psi - \frac{z_1}{x_1} cos^2\psi} \tag{9}$$

Die stationären Punkte erhalten wir aus den Nullstellen der Ableitung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dT^{(0)}}{d\psi} = \frac{m g x_1}{4} \frac{tan^2\psi - 2\frac{z_1}{x_1} tan\psi - 1}{(sin\psi - \frac{z_1}{x_1} cos\psi)^2} \\ 0 &= tan^2\psi - 2\frac{z_1}{x_1} tan\psi - 1 \\ tan\psi &= \frac{z_1}{x_1} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{z_1}{x_1}\right)^2} \end{aligned} \tag{10}$$

Für $z_1 = 0$ ist der energieeffizienteste Abwurfwinkel 45°.

2 Eisenbahn

Ein Zug der Masse $m = 5,0 \cdot 10^5 kg$ mit 16 Achsen fährt mit einer Geschwindigkeit von $200\frac{km}{h}$ von München (48° nördliche Breite) auf gerader Strecke in Richtung Norden.

1. Berechnen Sie die Coriolisbeschleunigung, die der Zug erfährt und vergleichen Sie den Betrag mit der Erdbeschleunigung g.
2. Mit welcher Kraft wird ein linkes bzw. ein rechtes Rad des Zuges gegen die Schiene gedrückt?
3. Was ändert sich bei einer Fahrt in Richung Süden, Osten oder Westen?

Lösung:

Wir wählen die Achsen des mitbewegten kartesischen Koordinatensystems $\sum'$ so, dass z' längs des Schwerefeldes nach oben weist, x' in Richtung Osten und y' nach Norden. In der Darstellung aus $\sum'$ lautet die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Erde:

$$\vec{\Omega}' = (0, \Omega cos\varphi, \Omega sin\varphi)^T \tag{11}$$

wobei ihr Betrag $\Omega = \frac{2\pi}{24h}$ ist. Die Corioliskraft ist für eine allgemeine Geschwindigkeit v' gegeben durch:

$$\vec{F}_c' = 2m\vec{v}' \times \vec{\Omega}' = 2m \begin{pmatrix} v_x' \\ v_y' \\ v_z' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega cos\varphi \\ \Omega sin\varphi \end{pmatrix} = 2m\Omega \begin{pmatrix} v_y' sin\varphi - v_z' cos\varphi \\ -v_x' sin\varphi \\ v_x' cos\varphi \end{pmatrix} \tag{12}$$

Bei horizontaler Bewegung ($v_z' = 0$) mit Betrag $v = |\vec{v}'|$ ergibt sich eine Coriolisbeschleunigung in der x'-y'-Ebene deren Betrag:

$$a_h = 2v\Omega sin\varphi = 6,0 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2} = 6,1 \cdot 10^{-4} kg \tag{13}$$

unabhängig von der Richtung der Bewegung ist (Zahlenwerte entsprechend der Daten des Zuges). Die Coriolisbeschleunigung weist auf der Nordhalbkugel stets in Bewegungsrichtung nach rechts. Die rechts liegenden Räder werden daher mit einer Kraft von:

$$F_R = \frac{m}{16} a_h = 1,9 \cdot 10^2 N \tag{14}$$

gegen die Schiene gedrückt.
Die im Falle einer Ost-West-Bewegung auftretende vertikale Komponente der Coriolisbeschleunigung:

$$a_v = 2v_x' \Omega cos\varphi = 5,4 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2} = 5,5 \cdot 10^{-4} g \tag{15}$$

entspricht einer Veränderung des Gesamtgewichtes um $\pm 2,7 \cdot 10^2 kg$ bzw. einer Kraft auf jedes Rad um $\pm 1,7 \cdot 10^2 N$ (gegenüber $3,1 \cdot 10^5 N$ Gewicht) und ist regelmäßig gegenüber der Erdbeschleunigung g vernachlässigbar.
Zum Vergleich berechnen wir noch die Zentrifugalkraft:

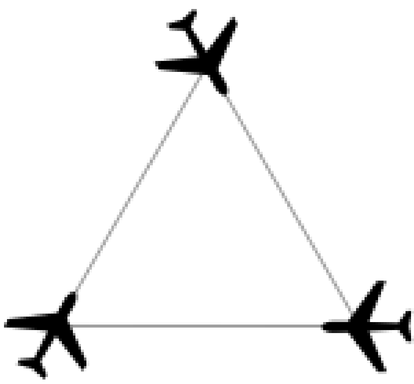
$$\vec{F}'_z = -R_E m \vec{\Omega}' \times (\vec{\Omega}' \times \vec{e}_{z'}) = R_E m \Omega^2 cos\varphi \vec{e}_\rho \tag{16}$$

wobei $\vec{e}_\rho = cos\varphi \vec{e}_{z'} - sin\varphi \vec{e}_{y'}$ der radiale Einheitsvektor der Zylinderkoordinaten ist. Die Zentrifugalbeschleunigung ergibt sich zu:

$$\vec{a}'_Z = R_E \Omega^2 cos\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ -sin\varphi \\ cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,7 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s^2} \\ 1,5 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,7 \cdot 10^{-3} g \\ 1,5 \cdot 10^{-3} g \end{pmatrix} \tag{17}$$

3 Drei Flugzeuge

Drei baugleiche Flugzeuge starten gleichzeitig an den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge l, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Sie fliegen mit einer Geschwindigkeit konstanten Betrags v stets in Richtung des im Uhrzeigersinn nächsten Flugzeugs. Berechnen Sie die Zeit bis zum Zusammenstoß der drei Flugzeuge.



Lösung:

Die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks zum Zeitpunkt $t = 0$ sei l. Der Koordinatenursprung liege in der Ebene der Flugzeuge und falle mit dem Mittelpunkt des Dreiecks zusammen.
Die Position des ersten Flugzeugs (die Rechnung gilt natürlich analog für jedes der Flugzeuge) sei bezeichnet durch $\vec{r}(t)$. Es gilt:

$$|\vec{r}(0)| = r(0) = \frac{2}{3} l cos\frac{\pi}{6} = \frac{l}{\sqrt{3}} \tag{18}$$

Aus Symmetriegründen sind die Abstände der Flugzeuge untereinander auch zu späteren Zeiten stets gleich, d. h. die Flugzeuge befinden sich stets auf den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Aus dieser Geometrie folgt für den Winkel zwischen Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und Ortsvektor $\vec{r}(t)$:

$$\sphericalangle(\vec{v}(t), \vec{r}(t)) = \psi(t) = \psi(0) = \pi - \frac{\pi}{6} \tag{19}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \dot{\vec{r}}(t) \\
\vec{r} \cdot \vec{v} &= \vec{r}\dot{\vec{r}} \\
rvcos\psi &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{r}) \\
rvcos\psi &= \frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt} \\
rvcos\psi &= r\frac{dr}{dt} \\
\frac{dr}{dt} &= -v\frac{\sqrt{3}}{2} \\
r(t) &= \frac{l}{\sqrt{3}} - v\frac{\sqrt{3}}{2}t
\end{aligned} \tag{20}$$

Damit ergibt sich für die Zeit bist zum Zusammenstoß t_S:

$$r(t_S) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t_S = \frac{2l}{3v} \tag{21}$$

Ergänzung: Um Die Bahnkurve zu erhalten, zerlegen wir die Geschwindigkeit in Komponenten parallel und senkrecht zu $\vec{r}$. Die senkrechte Komponente, die sich aus der Geometrie zu:

$$|\vec{v}_\perp| = vsin\psi = \frac{v}{2} \tag{22}$$

ergibt, bestimmt die momentane Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega(t) = \frac{v_\perp}{r(t)} \tag{23}$$

Wir parametrisieren die Bewegung durch Zylinderkoordinaten:

$$\vec{r} = (r(t)cos\varphi(t), -r(t)sin\varphi(t), 0)^T \tag{24}$$

Den momentanen Drehwinkel erhalten wir damit durch Integration:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi(0) + \int_0^t \omega(t')dt' = \varphi(0) + \frac{v}{2}\int_0^t \frac{1}{\frac{l}{\sqrt{3}} - v\frac{\sqrt{3}}{2}t'}dt' = \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{\sqrt{3}} ln \frac{r(0)}{r(t)}\end{aligned} \tag{25}$$

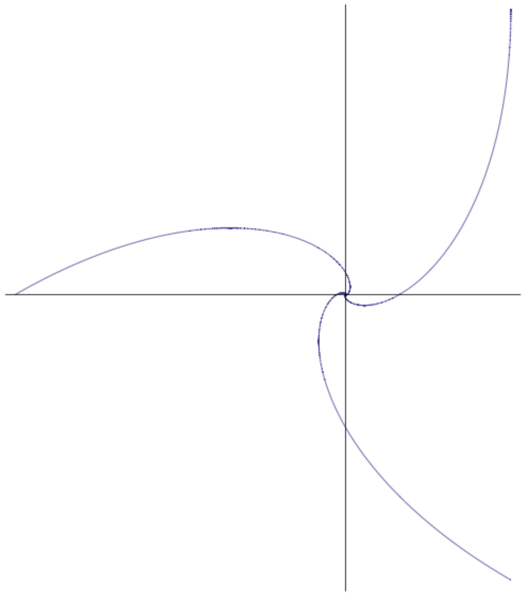
Daraus lesen wir ab, dass die Bahnkurve eine logarithmische Spirale darstellt. Es gilt:

$$r(t) = r(0)e^{-\sqrt{3}(\varphi(r)-\varphi(0))} \tag{26}$$

Bei jeder Umdrehung verringert sich der Abstand zum Zentrum mit dem Faktor:

$$e^{-2\pi\sqrt{3}} = 1,88 \cdot 10^{-5} \tag{27}$$

Die Lösung ist skaleninvariant weshalb auf Achsenbeschriftung verzichtet werden kann.



4 Foucaultsches Pendel

Betrachten Sie ein mathematisches Pendel der Länge $l \ll R_E$ und Masse m auf der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω rotierenden Erde. Vernachlässigen Sie die Rotation der Erde um die Sonne. Die z'-Achse des mitbewegten Koordinatensystems verbinde Erdmittelpunkt und Aufhängepunkt bei geographischer Breite ϕ. Die x'-Achse verlaufe längs des Breitengrades und die y'-Achse längs des Längengrades am Aufhängepunkt.

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für das Pendel auf. Begründen Sie, dass die vertikale Bewegung sowie die Zentrifugalterme vernachlässigt werden können.

2. Führen Sie die komplexe Koordinate $Z' = x' + iy'$ ein und lösen Sie die Bewegungsgleichungen mit den Anfangsbedingungen $x'(0) = a$, $y'(0) = 0$ und $\dot{x}'(0) = \dot{y}'(0) = 0$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

1. In einem Inertialsystem ist die Bewegungsgleichung eines ebenen Pendels gegeben durch:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} sin\varphi \tag{28}$$

dabei kann für kleine Auslenkungen die Näherung $x \approx l\varphi \approx lsin\varphi$ verwendet werden, sodass wir erhalten:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} x \tag{29}$$

Entsprechend der Eisenbahnaufgabe wirkt im rotierenden Bezugssystem auf der Erde zusätzlich noch die Zentrifugalbeschleunigung:

$$\vec{a}'_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,7 \cdot 10^{-3} g \\ 1,5 \cdot 10^{-3} g \end{pmatrix} \tag{30}$$

Diese ist im Labor und unabhängig von der Bewegung des Testteilchens, sie kann daher als Korrektur des Schwerefeldes betrachtet werden. Die Korrektur ist aber sowohl in Betrag (die effektive Beschleunigung ist 0,998 g) als auch Richtung (der Cosinus ist 0,9999986) vernachlässigbar. Daher ist nur die Corioliskraft:

$$\vec{F}'_C = 2m\Omega \begin{pmatrix} v_{y'} sin\phi - v_{z'} cos\phi \\ -v_{x'} sin\phi \\ v_{x'} cos\phi \end{pmatrix} \tag{31}$$

zu berücksichtigen. Bei kleinen Auslenkungen des Pendels ist $v_{z'} \ll v_{x'}, v_{y'}$ und somit vernachlässigbar. Die Beschleunigung in z'-Richtung ist vernachlässigbar, da sie lediglich mit wechselndem Vorzeichen gegen und mit der Zwangskraft wirkt und somit keine oder nur vernachlässigbaren Effekt auf die Bewegung hat. Wir erhalten daher als Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{x}' = -\frac{g}{l}x' + 2\Omega\dot{y}'\,sin\phi \tag{32}$$

$$\ddot{y}' = -\frac{g}{l}y' - 2\Omega\dot{x}'\,sin\phi \tag{33}$$

2. Die Bewegungsgleichung für die komplexe Koordinate $Z = x' + iy'$ ist:

$$\ddot{Z} + \frac{g}{l}Z + 2\Omega sin\phi i\dot{Z} = 0 \tag{34}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + i2\lambda\Omega sin\phi + \frac{g}{l} = 0 \\ \lambda = -i\Omega sin\phi \pm i\sqrt{\frac{g}{l} + \Omega^2 sin^2\phi} \end{aligned} \tag{35}$$

Wir definieren noch $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}\Omega^2 sin^2\phi}$. Es gilt $\omega_0 \approx \frac{g}{l}$, falls $\Omega^2 \ll \frac{g}{l}$ oder am Äquator ($\phi = 0$). Wir erhalten damit ein Fundamentalsystem für die Lösungen der Bewegungsgleichung:

$$\{exp(-i\Omega sin\phi t + i\omega_0 t), exp(-i\Omega sin\phi t - i\omega_0 t)\} \tag{36}$$

oder alternativ:

$$\{e^{-i\Omega sin\phi t} sin\omega_0 t, e^{-i\Omega sin\phi t} cos\omega_0 t\} \tag{37}$$

Die allgemeine Lösung ist daher:

$$Z(t) = \underbrace{e^{-i\Omega sin\phi t}}_{\text{Drehung mit Frequenz } \Omega sin\phi} \underbrace{c_1 sin\omega_0 t + c_2 cos\omega_0 t}_{\text{Ellipse}} \tag{38}$$

dabei ist:

$$\begin{aligned} c_1 &= x_0 + iy_0 = a \\ c_2 &= \frac{v_{0x} - y_0\Omega sin\phi}{\omega_0} + i\frac{v_{0y} - x_0\Omega sin\phi}{\omega_0} = -i\frac{a\Omega sin\phi}{\omega_0} \end{aligned} \tag{39}$$

5 Gedämpfter, harmonischer Oszillator

Betrachten Sie einen gedämpften, harmonischen Oszillator mit Masse m. Die Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators sei ω_0 und die Dämpfunskonstante sei κ. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{40}$$

1. Lösen Sie die Bewegungsgleichung (40) für den Fall $\omega_0 > \kappa$ mit Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0)v_0$ über den Standardansatz $x(t) = exp(\lambda t)$.
2. Ermitteln Sie die Lösung für den Fall $\omega_0 = \kappa$ als Grenfall von 1.
3. Sei nun $\omega = \kappa$. Berechnen Sie für den Fall $x_0 = 0$ den Zeitpunkt t_1, bei dem die maximale Auslenkung, also der Umkehrpunkt, erreicht wird.

Lösung:

1. Mit dem Ansatz $x(t) = exp(\lambda t)$ erhalten wir das charakteristische Polynom der Differentialgleichung (40):

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\kappa\lambda + \omega^2 = 0 \\ \lambda_\pm = -\kappa \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} \end{aligned} \tag{41}$$

Mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$ erhalten wir ein Fundamentalsystem für die Lösungen der Bewegungsgleichung:

$$\{exp(-\kappa t + i\omega t), exp(-\kappa t - i\omega t)\} \tag{42}$$

oder alternativ:

$$\{e^{-\kappa t} sin\omega t, e^{-\kappa t} cos\omega t\} \tag{43}$$

Die allgemeine Lösung ist daher:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\kappa t}(c_1 sin\omega t + c_2 \cos\omega t) \\ \dot{x}(t) &= e^{-\kappa t}((-\omega c_2 - \kappa c_1) sin\omega t + (\omega c_1 - \kappa c_2) cos\omega t) \end{aligned} \tag{44}$$

Die Anfangsbedingungen liefern daher:

$$c_1 = \frac{1}{\omega}(v_0 + \kappa x_0) \qquad c_2 = x_0 \tag{45}$$

2. Im Fall $\omega_0 = \kappa$ ist $\omega = 0$ und damit die beiden Lösungen aus 1. nicht mehr linear unabhängig. Da $\lambda = -\kappa$ nun doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, erhalten wir als ein Fundamentalsystem:

$$\{e^{-\kappa t}, te^{-\kappa t}\} \tag{46}$$

Die allgemeine Lösung ist daher:

$$\begin{aligned} x(t) &= (c_1 t + c_2)e^{-\kappa t} \\ \dot{x}(t) &= (c_1 - c_1 \kappa t - c_2 \kappa)e^{-\kappa t} \end{aligned} \tag{47}$$

Die Anfangsbedingungen liefern daher erneut:

$$c_1 = v_0 + \kappa x_0 \qquad\qquad c_2 = x_0 \tag{48}$$

Diese Lösung ergibt sich auch durch Grenzwertbetrachtung. Für $\omega \longrightarrow 0$ gilt:

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{sin\omega t}{\omega} = t \qquad\qquad \lim_{\omega\to 0} cos\omega t = 1 \tag{49}$$

Damit erhalten wir direkt aus der Lösung aus Teil 1:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega\to 0} &= e^{-\kappa t}\left(\frac{v_0 + \kappa x_0}{\omega} sin\omega t + x_0 cos\omega t\right) \\ &= e^{-\kappa t}((v_0 + \kappa x_0)t + x_0) \end{aligned} \tag{50}$$

3. Sei nun $x_0 = 0$. Am Umkehrpunkt bei t_1 ist ein lokales Maximum, sodass gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}(t_1) = (v_0 - v_0 \kappa t_1)e^{-\kappa t_1} \\ t_1 &= \frac{1}{\kappa} \end{aligned} \tag{51}$$