Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Sommer 2013

Vorlesung 2

Inhaltsverzeichnis

1 Systeme von Massenpunkten

Im folgenden werden Systeme von N-Teilchen beschrieben. Hierzu werden wieder Impuls, Drehimpuls und Energie des Systems disskutiert.
Grundlegend gilt für ein System von N-Teilchen:

- N-Teilchen (i=1,...,N), Ortsvektor $\boldsymbol{r}_i$, Massen m_i
- Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{v}_i = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}$
- Impuls $\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v_i}$
- *Innere Kräfte:* Kräfte zwischen zwei Teilchen $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$ i,j = (1,...,N) und i $\neq$ j
  Äußere Kräfte: Zusätzlich kann auf jedes Teilchen i noch eine äußere Kraft $\boldsymbol{F}_i^{ext}$ wirken
  Gesamtkraft auf Teilchen i : $\boldsymbol{F}_i = \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_i^{ext} = \dot{\boldsymbol{p}} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$
- Bewegungsgleichungen sind ein System von N gekoppelten Differentialgleichungen 2. Ordnung:
  $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \sum\limits_i m_i \boldsymbol{r}_i = \sum\limits_i F_i^{ext} + \sum\limits_{i\not j} \boldsymbol{F}_{ij}$
  Mit $\sum_i F_i^{ext} = \boldsymbol{F}_i^{ext}$ und den inneren Kräften $\sum_{i\neq j} \boldsymbol{F}_{ij} = 0$

1.1 Schwerpunktsimpuls

Der Schwerpunkt eines Vielteichensytems ist wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i \quad \text{mit} \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{1}$$

Hiermit ergibt sich die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt:

$$\boldsymbol{F}^{ext} = M \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2} \tag{2}$$

Die Bewegung des Schwerpunktes findet also so statt, als ob die Masse in ihm vereinigt wäre und als ob die Summe der äußeren Kräfte auf ihn wirkt.
Weiterhin können wir den Gesamtimplus definieren:

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i \quad \text{und} \quad \boldsymbol{F}^{ext} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{P} \tag{3}$$

Falls $\boldsymbol{F}^{ext} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{ext} = 0$, es sich also um ein abgeschlossenens System handelt, dann ist der Schwerpunktsimpuls $\boldsymbol{P}$ erhalten ($\boldsymbol{P} = \text{const}$).
Bei der Beschreibung von Systemen von Massenpunkten verwendet man bevorzugt ein Inertialsystem, in dem der Schwerpunkt ruht.

1.2 Drehimpuls

Analog zum Gesamtimpuls definiert man den Gesamtdrehimpuls als die Summe der einzelnen Drehimpulse $\boldsymbol{l}_i$:

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{l}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i \tag{4}$$

Weiterhin ist das Gesamtdrehmoment definiert als:

$$\boldsymbol{M}^{ext} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{ext} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}^{ext} \tag{5}$$

Handelt es sich um ein abgeschlossenens Sytem, also $\boldsymbol{F}^{ext} = 0$, so gilt Drehimpulserhaltung ($\boldsymbol{L} = \text{const}$).

1.3 Energie

Für Vielteilchensysteme gilt:

- kinetische Energie:
  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m_i}$
- konservative Kräfte:
  $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{\nabla}_i U_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$ und $\boldsymbol{F}_{ji} = +\boldsymbol{\nabla}_j U_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$
  Hieraus folgt, dass $U_{ij} = U_{ji}$ symmetrisch und $U_{ii} = 0$ (*)
- potentielle Energie(für konservative Kräfte):
  $U = U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_N) = \sum_i^N U^{ext}(\boldsymbol{r}_i) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^{N} U_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$
  $=^* \sum_i^N U^{ext}(\boldsymbol{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^{N} U_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$
- Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie $E = T + U$ entspricht der Leistung der äußeren Kräfte:
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + U) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{F}_i^{ext}$

Für ein abgeschlossenes Sytem ($\boldsymbol{F}^{ext} = 0$) ist die Energie erhalten, also $E = T + U = \text{const}$.

2 Beschleunigte Bezugssyteme

Systeme, in denen die Newton'schen Axiome gelten, heißen Inertialsyteme. Weiterhin gibt es jedoch Bezugssyteme in denen die Axiome nicht gelten. Diese sind relativ zu einem Intertialsystem beschleunigt. Die hier entstehenden Zusatzterme in den Bewegungsgleichungen sollen im folgenden disskutiert werden.

2.1 Linear beschleunigte Bezugssyteme

Betrachtet werden zwei Bezugssysteme. Ein Intertalsystem (IS) und ein beschleunigtes Bezugssystem (KS').

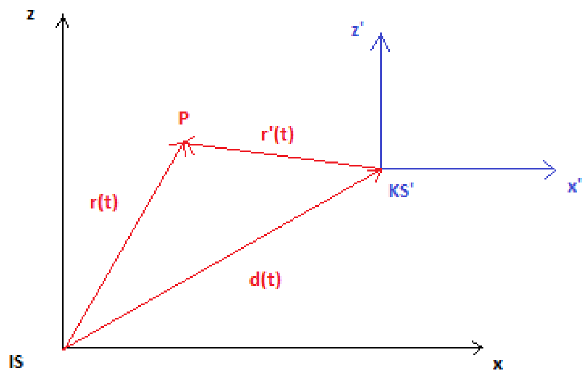

Abbildung 1: Linear beschleunigtes Bezugssystem

Da der Ursprung von KS' realtiv zu IS konstant beschleunigt ist, gilt:

$$\boldsymbol{d}(t) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

Woraus sich folgende Transformation ergibt:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r'}(t) + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

Somit definiert sich die Bewegungsgleichung für ein kräftefreies Teilchen in KS':

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = 0 \quad \text{in IS} \quad \Longrightarrow \quad m\ddot{\boldsymbol{r}}'(t') = -m\boldsymbol{a} \quad \text{in KS'} \tag{6}$$

Der Zusatzterm entspricht einem konstanten Kraftfeld $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.
Diese auftretenden Kräfte werden Trägheitskräfte oder auch Scheinkräfte genannt, da sie ihren Ursprung in dem Trägheitsterm $m\ddot{\boldsymbol{r}}$ haben bzw. weil sie in Intertialsystemen nicht auftreten.

Beispiel:
Legt man das Bezugssystem in einen Fahrstuhl, der konstant beschleunigt wird, so wirkt auf nicht nur die Gravitationskraft $\boldsymbol{F}_{Grav} = m\boldsymbol{g}$, sondern auch die Trägheitskraft $\boldsymbol{F}_{Trae} = m\boldsymbol{a}$. Die transformierte Bewegungsgleichung lautet dann:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a})$$

2.2 Rotierende Bezugssyteme

Das Beschleunigte Bezugssystem KS' rotiert mit

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

gegenüber dem Intertialssytem IS.

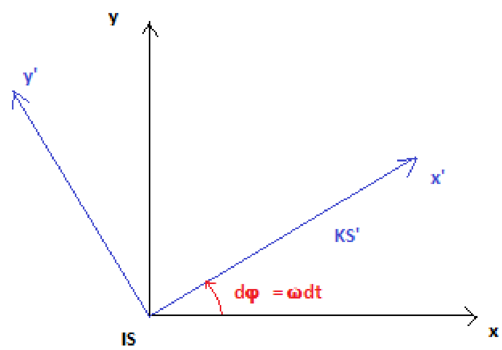

Abbildung 2: Rotierendes Bezugssytem

Zunächst betrachtet man einen Vektor $\boldsymbol{G}$, welcher von KS' zeitunabhängig ist, sowie eine konstante Länge besitzt und eine konstante Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Aus Abbildung 3 kann man herauslesen, dass die Änderung dieses Vektors gegeben ist durch:

$$|d\boldsymbol{G}_{rot}| = |\boldsymbol{G}||d\varphi|\sin(\theta)$$

Da $d\boldsymbol{G}_{rot} \perp \boldsymbol{\omega}$ und $d\boldsymbol{G}_{rot} \perp \boldsymbol{G}$ folgt:

$$d\boldsymbol{G}_{rot} = d\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{G} = (\boldsymbol{\omega} dt) \times \boldsymbol{G}$$

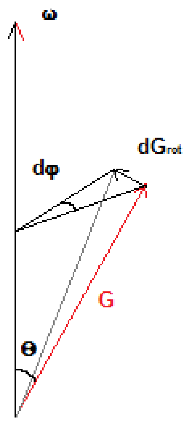

Abbildung 3: Änderung eines Vektors durch Drehung

Die Änderung von $\boldsymbol{G}$ in IS ist dann gleich:

$$d\boldsymbol{G}_{IS} = d\boldsymbol{G}_{KS'} + d\boldsymbol{G}_{rot} \tag{8}$$

Woraus man folgende Zeitableitung erhält:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}\right)_{IS} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}\right)_{KS'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{G}$$

Diese Erkenntnisse über den Vektor G können nun auf einen Ortsvektor r übertragen werden. Somit erhält man für die Geschwindigkeit:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$$

Nochmaliges Differentieren ergibt die Beschleunigung:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}\right)_{IS} = \left(\frac{\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_{KS'} + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\boldsymbol{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}' + 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}') + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$$

Mit der Beschleunigung und dem 1.Axiom (für freies Teilchen in IS: $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{IS} = 0$) kann man die Bewegungsgleichung eines freies Teilchens im rotierenden Bezugssystem formulieren:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}' = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}') - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$$

Die Trägheitskräfte auf der rechten Seite bezeichnet man als Corioliskraft und Zentrifugalkraft.

Beispiel:
Auf der Erdoberfläche mit der geometrischen Breite φ_0 steht ein Turm der Höhe h. Der Platz auf dem der Tum steht liegt in der $x' - y'-$Ebene, der Trum in der z'-Achse des rotierenden Bezugssystem KS' (ω^2 -Terme sollen vernchlässigt werden).
Die Bewegungsgleichung lautet also mit der Gravitationskraft $\boldsymbol{F}_{Grav} = -m\boldsymbol{g}$:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}' = -m\boldsymbol{g} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}})$$

da die Zentrifugalkraft $\propto \boldsymbol{\omega}^2$ wird der Term $m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$ vernachlässigt.

3 Lagrange Gleichungen 1. und 2. Art

3.1 Zwangsbedingungen

Bewegungen in der Mechanik sind oft Zwangsbedingungen unterworfen.

Ein Beispiel hierfür ist ein Starres Pendel:

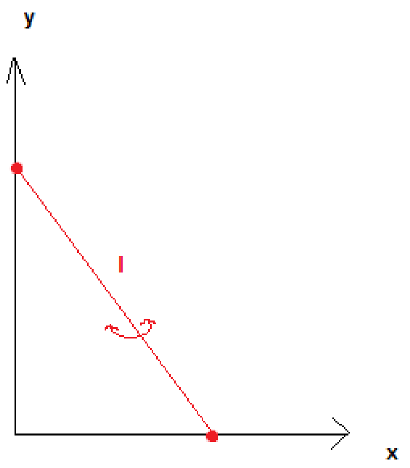

Abbildung 4: Starres Pendel

Für dieses Pendel gilt die Zwangsbedingung:

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0 \qquad \text{(folgt aus dem Satz des Pythagoras)}$$

Man bezeichnet ein System als *holonom*, wenn die Zwangsbedingungen in der Form $f_k(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_N; t) = 0$ mit $k = 1, ..., p$ sind.

Für Zwangskräfte kann man folgende wichtige Aussagen zusammenfassen:

- Ist eine holonome Zwangsbedingung eine explizite Funktion der Zeit, so bezeichnet man sie als holonom-rheonom und holonom-skleronom falls $\frac{\partial}{\partial t} f_k = 0$
- Zwangsbedingungen erzwingen Zwangskräfte (Lagerkräfte, Auflagenkräfte, Fadenspannung, usw.)
- Zwangsbedingungen führen zu einer Reduktion in der Zahl der unabhängigen Freiheitsgrade

Allegmein gilt:
In einem System von N-Teilchen mit $3N$ Koordinaten $\{\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_N\}$ existieren p Zwangsbedingungen. So ist die Zahl der unabhängigen Freiheitsgrade: $S = 3N - p$

3.2 Verallgemeinerte Koordinaten

Für die Anzahl der unabhängigen Freiheitsgrade muss man nun geeignete verallgemeinerte Koordinaten (bzw. generalisierte Koordinaten) wählen:

$$\{q_1, q_2, ..., q_S\} \tag{9}$$

Die Wahl der neuen Koordinaten ist so zu treffen, dass die verallgemeinerten Koordinaten q_i die Lage aller Massenpunkte festlegen, also:

$$\boldsymbol{r}_N = \boldsymbol{r}_N(q_1, q_2, ..., q_S)$$

Ein Beispiel hierfür ist das Fadenpendel, welches in der x-y-Ebene schwingt. Es gelten folgende Zwangsbedingungen:

$$x^2 + y^2 = l^2$$
$$z = 0$$

Somit besitzt das System $S = 3N - p = 3 - 2 = 1$ unabhängigen Freiheitsgrad und damit eine verallgemeinerte Koordinate.
Man führt folgende neue Koordinaten ein:

$$x(\varphi) = l\cos\varphi \quad \text{und} \quad y(\varphi) = l\sin\varphi$$

Somit ist die verallgemeinerte Koordinate:

$$q = \varphi$$

Weiterhin kann man die allgemeine Geschwindigkeit definieren:

$$\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial q_i}{\partial r_k}\dot{\boldsymbol{r}}_k \quad \text{mit} \quad \frac{\partial q_i}{\partial r_k} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_N) \tag{10}$$

Mit Hilfe der allgemeinen Geschwindigkeit kann man die kinetische Energie ($T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\dot{\boldsymbol{r}}_k^2$) und potentielle Energie ($U = U(\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_N)$) in den neuen Koordinaten ausdrücken:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad (i,j = 1, ..., S) \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_j} \tag{11}$$

$$U = U(q_1, ...q_S) \quad \text{mit} \quad S = 3N - p \tag{12}$$

3.3 Lagrange Gleichungen 2.Art

Die Lagrange Funktion ist wie folgt definiert:

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}) - U(q) \tag{13}$$

Weiterhin kann man die Wirkung definieren

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) = S[q] \tag{14}$$

mit welcher man das **Hamiltonsche Prinzip** formulieren kann:

Zu zwei Zeiten t_1 und $t_2 > t_1$ nehme ein mechanisches System die Konfiguration $q^{(1)} = q(t_1)$ und $q^{(2)} = q(t_2)$ ein.
Die Bewegung zwischen diesen zwei Punkten verläuft stets so, dass die Wirkung S zwischen t_1 und t_2 einen stationären Wert (Extremalwert) einnimmt.

Die Lösung dieses Problems ist ein Problem der Variationsrechnung. Hierzu werden alle möglichen Pfade, die zwischen $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$ existieren, betrachtet. Daraufhin wird der Weg $q(t)$ gewählt, bei dem die Wirkung S extremal wird.

Um nun auf die Lagrage-Gleichung 2. Art zu kommen, minimiert man die Wirkung. Hierzu werden folgende Annahmen getroffen:

- $q(t)$ sei die gesuchte Funktion (bei der die Wirkung minimal ist)
- Die Änderung von $q(t)$ ist: $q(t) + \delta q(t)$.
  δq wird mit $\alpha\eta(t)$ parametriesiert, also: $\delta q = \alpha\eta(t)$
- Es gelten die Randbedingungen: $\delta q_1 = \delta q_2 = 0$, weil die Variation des Weges an den Anfangs- und Endpunkten null ist.
- Man erhält für die verallgemeinerte Koordinate: $q(t, \alpha) = q(t, \alpha = 0) + d\eta(t) \Rightarrow S = S(\alpha)$

Um nun den stationären Zustand zu finden, muss die Extremalbedingung angewendet werden:

$$\left.\frac{\mathrm{d}S_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}S_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha}\right] = 0 \tag{16}$$

Durch die Parametriesierung ist bekannt, dass $\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \eta(t)$ und $\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} = \frac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{d}t}$. Setzt man dies in (16) ein und integriert den hinteren Teil partiell erhält man:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\eta(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} \right] \overset{\text{P.I.}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\eta(t) - \eta(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] = 0 \tag{17}$$

mit $\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta(t) \right]_{t_1}^{t_2} = 0$ wegen $\delta q_1 = \delta q_2 = 0$, woraus $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ folgt.
Durch Ausklammern von $\eta(t)$ erhält man:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \eta(t) = 0 \tag{18}$$

Da $\eta(t)$ laut Vorraussetzung nicht null ist, muss $\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right]$ null werden damit S minimal wird. Somit folgt die **Lagrange-Gleicung 2. Art**:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{19}$$

Besitzt ein System mehrere Freiheitsgrade, so erhält man für jede verallgemeinerte Koordinate eine Lagrange-Gleichung.

Weiterhin wir definiert man an dieser Stelle den verallgemeinerten Impuls:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{20}$$

3.4 Lagrange Gleichungen 1.Art

Zwangs- und Nebenbedingungen können auch systematisch durch Einführung von Lagrange-Multiplikatoren behandelt werden.
Allgemein besitzt ein System von N Massenpunkten mit 3N-kartesischen Koordinaten die Lagrange-Funktion:

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 - U(x_1, ..., x_{3N}, t)$$

Diese System unterliegt p Zwangsbedingungen mit der Gleichung:

$$G_\alpha(x, t) = G_\alpha(x_1, ..., x_{3N}, t) = 0 \quad \text{mit} \quad (\alpha = 1, ..., p)$$

Man erhält eine neue veränderte Lagrange-Funktion:

$$L^*(x, \dot{x}, t) = L(x, \dot{x}, t) + \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha G_\alpha(x, t) = 0 \tag{21}$$

Das Prinzip der stationären Wirkung führt aud die **Lagrange-Gleichung 1. Art**:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x_i} + \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_i} \tag{22}$$