Merlin Mitschek, Verena Walbrecht

Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Sommer 2013

Vorlesung 1

PHYSIK
DEPARTMENT

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Differentitaion und Integration von Vektoren

Gegeben sei ein Vektorfeld:

$$\boldsymbol{A}(u) = \begin{pmatrix} A_x(u) \\ A_y(u) \\ A_z(u) \end{pmatrix} = A_x(u)\ \boldsymbol{e_x} + A_y(u)\ \boldsymbol{e_y} + A_z(u)\ \boldsymbol{e_z} \tag{1}$$

Dann ist die Ableitung gegeben durch:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(u)}{\mathrm{d}u} = \left(\frac{\mathrm{d}A_x(u)}{\mathrm{d}u}\ ,\ \frac{\mathrm{d}A_y(u)}{\mathrm{d}u}\ ,\ \frac{\mathrm{d}A_z(u)}{\mathrm{d}u}\right) \tag{2}$$

Sowie das Integral:

$$\int du\ \boldsymbol{A}(u) = \left(\int du\ A_x(u)\ ,\ \int du\ A_y(u)\ ,\ \int du\ A_z(u)\right) \tag{3}$$

1.2 Differentation von Funktionen mit mehreren Veränderlichen

Gegeben sei eine Funktion $f(x_i)$ (mit $i = 1, 2, 3$).
Dann definiert man die partielle Ableitung nach i wie folgt

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \tag{4}$$

Bei der partiellen Differentation werden alle Variabeln außer x_i festgehalten und nach x_i abgeleitet.

1.3 Bahnkurven

Die Dynamik eines Teilchens in Raum und Zeit wird durch eine Bahnkurve

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

beschrieben.
Geschwindigkeit und Beschleunigung sind wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\quad ,\quad \boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{6}$$

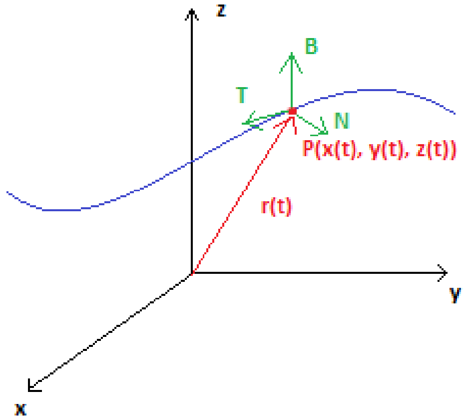

Abbildung 1: Bahnkurve in 3 Dimensionen

Damit man von dem Koordinatensystem unabhängig wird, legt man eine Orthonormalbasis aus drei Vektoren ($\boldsymbol{T}$: Tangentenvektor, $\boldsymbol{N}$: Normalenvektor und $\boldsymbol{B}$: Binominalvektor) in den Punkt $P(x(t), y(t), z(t))$, welcher die Position des Teilchens beschreibt.

Diese drei Vektoren können über die Bogenlänge bestimmt werden, welche sich durch Integration wie folgt ergibt:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ds = \int_{t_0}^{t} |d\boldsymbol{r}| = \int_{t_0}^{t} dt \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right| \tag{7}$$

Somit können nun die 3 Vektoren der Orthonormalebasis beschrieben werden:

- $\boldsymbol{T} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$
- $\kappa \boldsymbol{N} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$, wobei κ der Krümmungsradius der Kurve ist
- $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$

Da man in der theoretischen Mechanik viele Probleme auf ein Zentralkraftproblem zurückführen kann, ist es in diesen Fällen sinnvoll in ein anderes Koordinatensystem zu wechseln.

1.3.1 in Zylinderkoordinaten

Die kartesischen Koordinaten transformieren sich in Zylinderkoordinaten wie folgt:

- $x = \rho \cos(\varphi)$

- $y = \rho \sin(\varphi)$
- $z = z$

In diesen neuen Koordinaten definieren sich Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung wie folgt:

- $\boldsymbol{r} = \rho\ \boldsymbol{e_\rho} + z\ \boldsymbol{e_z}$
- $\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\ \boldsymbol{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\ \boldsymbol{e_\varphi} + \dot{z}\ \boldsymbol{e_z}$
- $\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\ \boldsymbol{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\ \boldsymbol{e_\varphi} + \ddot{z}\ \boldsymbol{e_z}$

Hierbei sind die Einheitsvektoren wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{e_\rho} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \boldsymbol{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \boldsymbol{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3.2 in Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten transformieren sich die kartesischen Koordinaten folgendermaßen:

- $x = r\cos(\varphi)\sin(\theta)$
- $y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$
- $z = r\cos(\theta)$

Analog zu den Zylinderkoordinaten ergeben sich neue Darstellungen für Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung:

- $\boldsymbol{r} = r\ \boldsymbol{e_r}$
- $\boldsymbol{v} = \dot{r}\ \boldsymbol{e_r} + r\dot{\theta}\ \boldsymbol{e_\theta} + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\ \boldsymbol{e_z}$
- $\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2)\ \boldsymbol{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2)\ \boldsymbol{e_\theta} + (r\sin(\theta)\ddot{\varphi} + 2\sin(\theta)\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cdot\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi})\ \boldsymbol{e_\varphi}$

Wobei die Einheitsvektoren wie folgt definiert sind:

$$\boldsymbol{e_\rho} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}\ ,\ \boldsymbol{e_\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}\ ,\ \boldsymbol{e_z} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.4 Vektorielle Differentialoperatoren

1.4.1 Gradient

Gegeben sei ein Skalarfeld $\Phi(x, y, z)$.
Dessen Gradient ist folgendermaßen definiert:

$$\text{grad}\Phi(x, y, z) = \boldsymbol{\nabla}\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z}\Phi(x, y, z) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Der Gradient eines Skalarfeldes steht senkrecht auf den Äquipotentialflächen ($\Phi(x, y, z) =$ const.). Bestimmt man den Gradienten in einem beliebigen Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dann zeigt dieser immer in Richtung des steilsten Aufstiegs bzw. Abstiegs.

1.4.2 Divergenz

Einem differenzierbaren Vektorfeld $\boldsymbol{A(r)} = \begin{pmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{pmatrix}$ kann man dessen Divergenz zuordnen, welche definiert ist durch:

$$\text{div}\boldsymbol{A(r)} = \boldsymbol{\nabla A(r)} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{9}$$

Die Divergenz misst den lokalen Fluß des Vektorfeldes $\boldsymbol{A(r)}$ aus kleinen Volumina.

1.4.3 Rotation

Für ein Vektorfeld kann man des Weiteren die Rotation oder Wirbeldichte definieren:

$$\text{rot}\boldsymbol{A}(x, y, z) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y \\ \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z \\ \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x \end{pmatrix} \tag{10}$$

Die Rotation misst die lokale Drehrate bzw. Wirbeldichte des Vektorfeldes .

1.5 Linienintegrale

Das Wegintgral einer Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 ist die Arbeit bzw. Energie, die bei der Bewegung zwischen diesen zwei Punkten aufgewendet bzw. frei wird. Das Integral berechnet sich folgendermaßen:

$$A = \int_{P_1}^{P_2} d\boldsymbol{r}\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int_{P_1}^{P_2} (dx\ F_x + dy\ F_y + dz\ F_z) = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{11}$$

mit der Leistung $N = \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$.

1.6 Integralsätze

1.6.1 Gauß'scher Integralsatz

Der Gauß'sche Integralsatz besagt, dass der Fluss eines differenzierbaren Vektorfeldes $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ durch eine geschlossene Fläche gleich dem Volumenintegral über dessen Quelldiche $\mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ ist:

$$\oint_{F=\partial V} d\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \iiint dV\ \mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{12}$$

1.6.2 Stokes'scher Integralsatz

Der Stoke'sche Integralsatz besagt, dass die Summe der Wirbel über eine Fläche die Zirkulation eines Vektorfeldes längs einer orientierten geschlossen Kurve C ergibt:

$$\oint_{C=\partial F} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \iint d\boldsymbol{F}\ \mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{13}$$

2 Newton'sche Axiome

In der Mechanik werden als Grundgesetze die Newtonschen Axiome erfüllt.

- **1.Axiom:** Es gibt Bezugssysteme (Intertialsysteme) in denen sich ein Massenpunkt im kräftefreien Raum mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.
  $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v} = \text{const}$
- **2.Axiom:** Die Änderung des Impulses ist der Einwirkung einer Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft.
  $\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}$
- **3.Axiom:** Für Kräfte, die zwei Massenpunkte aufeinander ausüben gilt:
  $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$ *"actio gleich reactio"*
- **1.Zusatz:** Die Kräfte die zwei Massenpunkte aufeinander ausüben, wirken in Richtung der Verbindungslinie.
  $(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_{12} = 0$
- **2.Zusatz:** Wirken mehrere Kräfte auf einen Massenpunkt, so summieren sich die Kräfte zu einer Gesamtkraft.
  $\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}$

3 Eindimensionale Bewegung

In der Mechanik werden wir uns auf Kräfte beschränken, die nur von Ort und Geschwindigkeit eines Teilchens abhängen, also:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t), t)$$

Die Standardprobleme der Mechanik sind:

- Kräftefreie Bewegung: $m\ddot{x} = 0$
- Bewegung im Graviationsfeld:$m\ddot{x} = -gm$
- Bewegung im Schwerefeld mit Reibung: $m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$
- Freie gedämpfte Schwingung:$m\ddot{x} = -kx - 2m\lambda\dot{x}$
- Erzwungene Schwingung: $m\ddot{x} = -kx - 2m\lambda\dot{x} + F(t)$

Die allgemeine Bewegungsgleichung einer Kraft die nur vom Ort abhängt lautet:

$$m\ddot{x} = F(x)$$

Multipliziert man nun beide Seiten mit $\dot{x}(t)$ und führt ein Potential $U(x(t))$ ein, für das gilt $F(x(t)) = -\dfrac{\mathrm{d}U(x(t))}{\mathrm{d}x}$ so erhält man:

$$m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t)F(x(t)) = -\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}U(x(t))}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}$$

Somit folgt, dass

$$\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + U(x(t)) = const. = E \quad \text{(Energie)}$$

Die Integrationskonstante beschriebt die Summe aus kinetischer Energie und potentieller Energie, also die Gesamtenergie. Mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes kann man die Lösung graphisch diskutieren:

Der Abstand zwischen $U(x)$ und der Horizontalen (der Gesamtenergie) beschreibt die kinetische Energie $\frac{m}{2}\dot{x}$. Die Punkte x_1 und x_2 werden als Umkehrpunkte bezeichnet, an diesen Stellen gilt $\dot{x}_{1,2} = 0$. Für $x > x_3$ findet eine offene Bewegung statt.

Die vorher erhaltene Differentialgleichung kann nun leicht gelöst werden und man erhält:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x')]}} \tag{14}$$

Durch lösen dieses Integrals erhält man $t(x)$, durch invertieren von $t(x)$ erhält man das gesuchte $x(t)$.

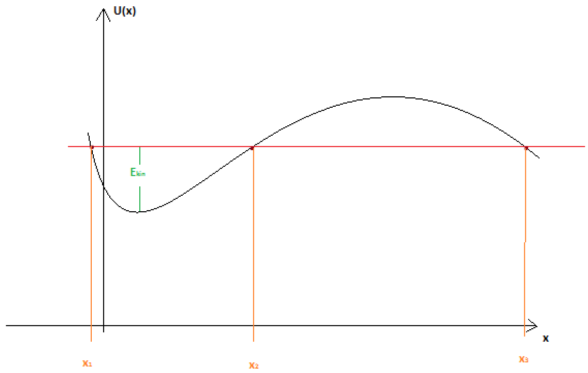

Abbildung 2: Potentialkurve

Verläuft die Bewegung zwischen zwei Umkehrpunkten x_1 und x_2, so definiert sich die Schwingung mit der Periode T wie folgt:

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x')]}} \tag{15}$$

4 Erhaltungssätze

4.1 Impulserhaltung

Wirkt auf ein Teilchen keine Kraft, so gilt:

$$\boldsymbol{F} = 0$$

Hieraus folgt, dass

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ und damit } \boldsymbol{p} = \text{const}$$

4.2 Drehimpulserhaltung

Der Drehimpuls ist wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{16}$$

Das auf ein Teilchenwirkende Drehmoment ist:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{17}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment, also:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} \tag{18}$$

Hieraus ergibt sich die Drehimpulserhaltung. Verschwindet das Drehmoment, so ist der Drehimpuls erhalten.

$$\boldsymbol{M} = 0$$

somit folgt, dass

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ und damit } \boldsymbol{L} = \text{const}$$

4.3 Energieerhaltung

Bevor man die Energieerhaltung diskutieren kann muss erst der Begriff der Arbeit und der der konservativen Kräfte näher erläutert werden.

4.3.1 Arbeit

Die Arbeit die längs eines endlichen Weges C geleistet wird ist

$$W = \int_{r_1, C}^{r2} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F} \tag{19}$$

Die Arbeit entspricht der Energie, die vom Kraftfeld $\boldsymbol{F(r)}$ auf das Teilchen übertragen wird.

4.3.2 Konservative Kräfte

Kräfte, die durch ein Potential $U(\boldsymbol{r})$ in der Form $\boldsymbol{F(r)} = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r})$ darstellbar sind, heißen konservativ.
Hierbei sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\boldsymbol{F(r)}$ konservativ
- $\boldsymbol{F(r)} = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r})$
- $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F(r)} = 0$
- Die zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 verrichtete Arbeit ist unabhängig vom Weg

4.3.3 Energieerhaltungssatz

In einem konservativen Kraftfeld ist die Summe aus kinetischer Energie $T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$ und potentieller Energie $U(\boldsymbol{r})$ erhalten.

$$E = T + U = \text{const}$$

Gilt die Energierhaltung nicht, d.h. dass mechanische Energie in andere Energieformen umgewandelt wird, dann spricht man von Dissipativen Kräften. Ein Beispiel hierfür wären Reibungskräfte (Umwandlung in Wärmeenergie).