

# Ferienkurs 2013 Experimentalphysik 4

## Übung - 4. Tag

### Aufgabe 1 Moleküle im interstellaren Medium

In der Radio- und Infrarotastronomie beobachtet man u.a. auch Moleküllinien im interstellaren Medium. Aus diesen Beobachtungen können Rückschlüsse auf die galaktische Verteilung und Häufigkeit der Moleküle sowie auf Sternentstehungsgebiete und -mechanismen gezogen werden.

- Kohlenmonoxid  $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$  emittiert beim Übergang vom ersten angeregten Rotationsniveau ( $J = 1$ ) zum Grundzustand ( $J = 0$ ) eine Linie der Wellenlänge  $\lambda_0 = 2.6\text{mm}$ . Berechnen Sie die dazu gehörige Energie und den Abstand der beiden Atome im Molekül.
- Berechnen Sie die Energie und Frequenz des gleichen Übergangs auch für das Molekül  $^{13}\text{C}^{16}\text{O}$  sowie die relative Frequenzverschiebung. (*Hinweis:* Nehmen Sie den gleichen Abstand  $R$  wie beim  $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$ .)

### Aufgabe 2 Lithiummoleküle

Lithium kommt in zwei Isotopen vor,  $^6\text{Li}$  und  $^7\text{Li}$ , mit jeweils 3 Protonen und 3 bzw. 4 Neutronen. Der Gleichgewichtsabstand  $r_0$  in den Molekülen  $\text{H}^6\text{Li}$  und  $\text{H}^7\text{Li}$  sei gleich groß. Die Frequenz  $\nu$  entspreche dem Übergang zwischen den Rotationszuständen  $j = 1$  und  $j = 0$ . Experimentell wird zwischen den beiden Molekülsorten ein Frequenzunterschied von  $\Delta\nu = \nu(\text{H}^6\text{Li}) - \nu(\text{H}^7\text{Li}) = 1 \cdot 10^{10}$  Hz beobachtet. Die Moleküle sollen als starre Rotatoren betrachtet werden.

- Berechnen Sie den Gleichgewichtsabstand  $r_0$ .
- Berechnen Sie für beide Molekülsorten die Energie des Übergangs von  $j = 1$  nach  $j = 0$ .

### Aufgabe 3 Molekülvibration, Molekülspektroskopie

Wir betrachten nun ein Molekül das nicht rotiert ( $J=0$ ), aber dafür ist der Abstand  $R$  der beiden Atomkerne nicht mehr konstant. Die Kerne können also gegeneinander schwingen. Die Schrödingergleichung für die Radialbewegung lautet:

$$\frac{\hbar^2}{2M} \left[ \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{dS}{dR} \right) - E_{pot}(R) \right] S(R) = E \cdot S(R) \quad (1)$$

Für die potentielle Energie zwischen den beiden Kernen ist das Morse-Potential eine sehr gute Näherung:

$$E(R) = E_D(1 - e^{-a(R-R_0)})^2 \quad (2)$$

Da die Lösung der Schrödingergleichung mit Morse-Potential kompliziert ist, wollen wir uns hier auf die harmonische Näherung beschränken.

- Geben Sie die Entwicklung des Morse-Potentials bis zur 2. Ordnung an, und bringen Sie es auf die Form  $E_{pot}(R) \approx \frac{1}{2}k(R - R_0)^2$
- Geben Sie die Energieeigenwerte für dieses Potential an.
- Berechnen Sie die Anregungsenergien für die harmonischen Energieniveaus fürs  $H_2$ -Molekül (Dissoziationsenergie  $E_{diss} = 4.75$  eV,  $aR_0 = 1.44$ ).
- Zwischen welche Vibrationsniveaus unterschiedlicher elektronischer Niveaus sind elektromagnetische Übergänge besonders wahrscheinlich?
- Erklären Sie die Funktionsweise eines Wellenlängenschiebers, wie er bei Weißmachern (Waschmittel) zum Einsatz kommt.

## Aufgabe 4 Übergänge im Wasserstoffatom

Ein Wasserstoffatom befindet sich im angeregten Zustand  $2p$  und geht durch spontane Emission eines Photons in den Grundzustand  $1s$  über.

- Berechnen Sie den Einsteinkoeffizienten für diesen Übergang für den Fall eines linear polarisierten Photons.

*Hinweise:*  $\Psi_{nlm_l}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm_l}(\vartheta, \varphi)$ ,

$$R_{10}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}, \quad R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}a_0^{5/2}}re^{-r/(2a_0)},$$

$$Y_{00}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta,$$

$$\int_0^\infty dr r^n e^{-\alpha r} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

- Die mittlere Lebensdauer des  $2p$ -Zustands beträgt  $\tau = 1.6$  ns. Berechnen Sie die natürliche Breite für die Lyman- $\alpha$ -Linie ( $2p \rightarrow 1s$ ) und vergleichen Sie diese mit der Doppler-Breite bei Zimmertemperatur.
- Vergleichen Sie die sich aus b) ergebenden Breiten der Lyman- $\alpha$ -Linie ( $2p \rightarrow 1s$ ) mit der Hyperfeinstrukturaufspaltung (HFS) des Wasserstoffgrundzustandes, die durch die Wellenlänge  $\lambda = 21.1$  cm zwischen den beiden  $F$ -Zuständen charakterisiert ist. Welche Temperatur muss erreicht werden, damit die HFS von einem idealen Spektrometer aufgelöst werden kann?

*Hinweis:* Vernachlässigen[c] Sie hierbei die Hyperfeinstruktur der  $2p$  Energieniveaus

- Wie groß sind Übergangswahrscheinlichkeit und natürliche Linienbreite des Übergangs  $3s \rightarrow 2p$  im Wasserstoffatom, wenn die Lebensdauer der Zustände  $\tau(3s) = 23$  ns und  $\tau(2p) = 2.1$   $\mu$ s betragen?

## Aufgabe 5 Atomare Übergänge

- a) Zeigen Sie, dass  $\frac{\Delta\omega}{\omega_{ik}} = \frac{A_{ik}}{\omega_{ik}}$  gilt. (Hier ist  $A_{ik}$  der sogenannte Einsteinkoeffizient, der die Übergangswahrscheinlichkeit pro Sekunde eines spontanen Übergangs vom Zustand  $i$  in den Zustand  $k$  beschreibt.  $\omega_{ik}$  ist die Frequenz des Übergangs und  $\Delta\omega$  die Frequenzbreite des FWHM.)
- b) Zeigen Sie am Beispiel des  $2p \rightarrow 1s$  Übergangs des Wasserstoffatoms, dass die relative Linienbreite  $\frac{\Delta\omega}{\omega}$  für Ein-Elektronen Systeme von der Größenordnung  $\alpha^3$  ( $\alpha$ : Feinstrukturkonstante) ist. Berechnen Sie dazu zunächst den Einsteinkoeffizient  $A_{ik}$ , drücken Sie diesen dann geschickt durch  $\alpha^3$  aus und verwenden Sie den Zusammenhang aus a).

*Hinweise:*  $R_{10}(r) = 2 \cdot a_B^{-3/2} \cdot e^{-r/a_B}$  und  $R_{21}(r) = \frac{r}{\sqrt{24}} \cdot a_B^{-5/2} \cdot e^{-r/2a_B}$

*Das zu lösende Integral ist vom Typ:*

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}} \text{ mit } (n = 0, 1, 2, \dots, a > 0)$$

- c) Das Wasserstoffgas befinde sich nun in einem mit Flüssigstickstoff gekühlten Kryostaten ( $T = 77\text{K}$ ). Berechnen Sie die Intensität  $I(\omega)$  und die Halbwertsbreite  $\Delta\omega$  bei der die Intensität auf  $\frac{1}{2}$  abgefallen ist. Berechnen Sie auch  $\frac{\Delta\omega}{\omega_{kj}}$ . Diese Verbreiterung des Frequenzspektrums, das durch die Bewegung der Atome zustande kommt wird Dopplerverbreiterung genannt. Hat diese Dopplerverbreiterung Einfluss auf die Zerfallswahrscheinlichkeit?