Ferienkurs Experimentalphysik 2013

Lösung - 2. Tag

3. September 2013

Aufgabe 1

Die Energie des emittierten Photons beim Übergang $n \to m$ ist gegeben durch

$$\Delta E = Z^2 R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \tag{1}$$

Diese Gleichung kann man als Wellenlänge ausdrücken durch

$$\Delta E = \hbar\omega = \hbar ck = \hbar c \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2}$$

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 \frac{R_H}{2\pi\hbar c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \tag{3}$$

Bei einer Serie von Spektrallinien ist der Endzustand n fest, während der Anfangszustand m variiert. Es ist von Vorteil, mit der kürzesten Wellenlänge zu beginnen, da diese (größte Energie) dem Anfangszustand n = ∞ entspricht. Für diesen Fall ergibt sich:

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 \frac{R_H}{2\pi\hbar c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) \tag{4}$$

$$\frac{2\pi\hbar c}{R_H} \frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 197eVnm}{13.6eV} \cdot \frac{1}{568.46nm} = 0.1601 \tag{5}$$

$$\frac{Z}{m} \approx 0.4 = \frac{2}{5} \tag{6}$$

Es liegt daher nahe, es mit den Werten Z = 2 und m = 5 zu versuchen. Also mit:

$$\frac{1}{\lambda} = 4 \cdot \frac{R_H}{2\pi\hbar c} \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \tag{7}$$

Daraus ergibt sich für die drei größten Wellenlängen, also n = 6, 7, 8:

$$4 \cdot \frac{R_H}{2\pi\hbar c} \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} \right) = \frac{1}{1861.65nm} \tag{8}$$

$$4 \cdot \frac{R_H}{2\pi\hbar c}\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2}\right) = \frac{1}{1161.37nm} \tag{9}$$

$$4 \cdot \frac{R_H}{2\pi\hbar c}\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{8^2}\right) = \frac{1}{933.47nm} \tag{10}$$

was genau den angegebenen Werten entspricht. (Anmerkung: Würde man beispielsweise Z = 4, m = 10 probieren, dann würde man ebenfalls diese Wellenlängen finden, allerdings wären sie dann nicht die drei größten der Serie.)

Bei dem Atom handelt es also um einfach ionisiertes Helium He+ , die beobachteten Übergänge sind

$$\infty \to 5, 8 \to 5, 7 \to 5, 6 \to 5 \tag{11}$$

Aufgabe 2

a) Die Energie eines Elektrons mit den Quantenzahlen n und j ist unter Berücksichtigung der relativistischen Korrektur und der Feinstruktur

$$E_{n,m} = E_n \left[1 - \underbrace{\frac{Z^2\alpha^2}{n}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)}_{\text{Korrekturterm } \Delta E_{korr}/E_n}\right] \tag{12}$$

Es ist nun zu zeigen, dass der Korrekturterm immer zu einer Absenkung führt, hier also immer $E_{korr} > 0$ ist. Schaut man sich die einzelnen Komponenten an, so stellt man fest:

$$\frac{Z^2 e^2}{n} > 0 \tag{13}$$

für alle n. Außerdem muss

$$\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} > 0 \tag{14}$$

Wegen $j_{max} = l_{max} + 1/2 = n - 1 + 1/2$ gilt dann also

$$\frac{1}{n-1+1/2+1/2} - \frac{3}{4n} = \frac{4}{4n} - \frac{3}{4n} = \frac{1}{4n} > 0 \tag{15}$$

b) Auch in wasserstoffähnlichen Systemen gilt immer $s = 1/2$. Damit spaltet es genauso wieder Wasserstoff auch in n Niveaus auf.

c) Für n = 3 ist $\Delta E_{1/2} = 2.8 \cdot 10^{-4}$eV, $\Delta E_{3/2} = 8.02 \cdot 10^{-4}$eV, $\Delta E_{5/2} = 2.67 \cdot 10^{-5}$eV. Für n = 4 ist $\Delta E_{1/2} = 1.16 \cdot 10^{-4}$eV, $\Delta E_{3/2} = 4.46 \cdot 10^{-4}$eV, $\Delta E_{5/2} = 2.08 \cdot 10^{-5}$eV, $\Delta E_{7/2} = 8.93 \cdot 10^{-6}$eV.

Aufgabe 3

a) Das $3d$-Niveau hat $n = 3$ und $l = 2$. Wegen $j = l \pm \frac{1}{2}$ gibt es zwei neue Niveaus, nämlich

$$3d_{3/2}, 3d_{5/2} \tag{16}$$

Um die Energieverschiebung zu bestimmen, muss man den Wert von $H_{LS} = a\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$ für die neuen Niveaus nl_j berechnen. Laut Hinweis kann man dies durch l, s, j ausdrücken, und zwar so:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{J}^2 = (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{S})^2 = \boldsymbol{L}^2 + 2\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}^2 \tag{18}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \boldsymbol{S}^2) \tag{19}$$

Für die neuen Niveaus gilt

$$\boldsymbol{J}^2 = j(j+1)\hbar^2 \tag{20}$$

$$\boldsymbol{L}^2 = l(l+1)\hbar^2 \tag{21}$$

$$\boldsymbol{S}^2 = s(s+1)\hbar^2 \tag{22}$$

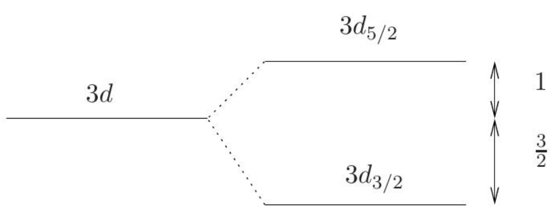
(eigentlich: die neuen Niveaus sind Eigenzustände von $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$ mit diesen Eigenwerten). Also ergibt sich für die Energiekorrektur:

$$\Delta E = \frac{a\hbar^2}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \tag{23}$$

Die beiden neuen Niveaus haben also

$$3d_{3/2} : \Delta E = \frac{a\hbar^2}{2}(\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}) = -\frac{3}{2}a\hbar^2 \tag{24}$$

$$3d_{5/2} : \Delta E = \frac{a\hbar^2}{2}(\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} - 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}) = +1a\hbar^2 \tag{25}$$



Die Dimension des $3d$-Niveaus ist wegen $l = 2$ und $s = \frac{1}{2}$:

$$d(3d) = (2s+1)(2l+1) = 10 \tag{26}$$

Die beiden neuen Niveaus haben die Dimensionen

$$d(3d_{3/2}) = 2j+1 = 4, d(3d_{5/2}) = 2j+1 = 6 \tag{27}$$

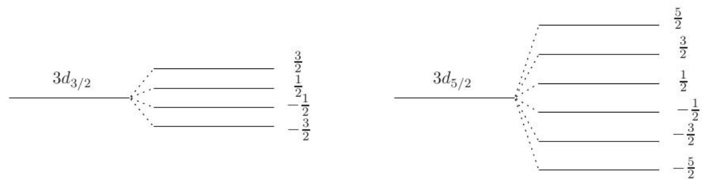
also zusammen ebenfalls 10.

b) Dies ist der anomale Zeeman-Effekt. Die Lande-Faktoren für die beiden Niveaus aus a) sind:

$$g_J(3d_{3/2}) = 1 + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} - 2\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} \tag{28}$$

$$g_J(3d_{5/2}) = 1 + \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2} - 2\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}} = \frac{6}{5} \tag{29}$$

Da die Größe der Aufspaltung proportional zu g_J ist, liegen die Niveaus in die $3d_{5/2}$ aufspaltet um den Faktor $6/4 = 3/2$ weiter auseinander als die Niveaus in die $3d_{3/2}$ aufspaltet.



Die magnetische Quantenzahl m_j hat die jeweils eingetragenen Werte, die Dimension aller Unterniveaus ist 1.

Aufgabe 4

a) Bildet man den Quotienten der Verschiebungen, die aus Feinstruktur und Hyperfeinstruktur

$$\frac{\Delta E_{HFS}}{\Delta E_{FS}} = \frac{g_I \mu_K (\vec{I}\cdot\vec{B}_j)/\hbar}{g_s \mu_B (\vec{S}\cdot\vec{B}_l)/\hbar} \tag{30}$$

so kann zum Abschätzen davon ausgegangen werden, dass die Drehimpuls $\vec{l}$ und $\vec{j}$ sowie die Spins $\vec{s}$ und $\vec{I}$ von der Größenordnung sind, was die resultierenden Magnetfelder vergleichbar macht. Die Lande-Faktoren g_s und g_I sind beide von der Größenorndung 1, also ergibt sich:

$$\frac{\Delta E_{HFS}}{\Delta E_{FS}} \approx \frac{\mu_K}{\mu_B} = \frac{1}{1836} \tag{31}$$

Daraus lässt sich schließen, dass die Hyperfeinstruktur zur Feinstruktur nur eine Nebenrolle spielt.

b) Die Konfiguration des Deuterons ist identisch zu der des Wasserstoffs. Das heißt, dass $n = 0$, $s = 1/2$ und damit $j = 1/2$. Es existieren nun zwei Zustände mit $F = 1/2$ und $F = 3/2$, was wegen $F = I + J$ bedeutet, dass der Kernspin $I = 1$ sein muss. Physikalisch betrachtet bedeutet dies, dass die Spins von Proton und Neutron parallel zueinander stehen.
c) Das $p_{3/2}$-Niveau hat den Gesamtdrehimpuls $j = 3/2$. Mit $I = 1$ und wegen $|I - J| \leq F \leq I + J$ kann $F = 1/2$, $F = 3/2$ oder $F = 5/2$ sein.

Aufgabe 5

a) Im Bohrschen Atommodell ist die Energie des Elektrons für eine beliebige Kernladung Z gegeben durch:

$$E_n = -13.6 \frac{Z^2}{n^2} eV \tag{32}$$

Setzt man nun Z = 3 für Lithium ein, so erhält man:

$$E_1 = -122eV$$

$$E_2 = -30.6eV$$

b) Für die Energiedifferenz vom m-ten in den n-ten Zustand erhält man (unter Vernachlässigung der Kernbewegung)

$$\Delta E = E_m - E_n = \frac{m_e e^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \tag{33}$$

In diesem Fall beträgt sie

$$\Delta E = 91.8392eV$$

Will man nun die Masse des Kerns in Betracht ziehen, so muss man mit der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_e m_K}{m_e + m_K}$ rechnen:

$$E_{red} = E \frac{\mu}{m_e} \Rightarrow \Delta E \frac{m_K}{m_K + m_e} = \Delta E \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_K}} \tag{34}$$

wobei m_e die Masse des Elektrons und m_K die Masse des Kerns darstellt. Für $^6\mathrm{Li}^{2+}$ berechnet sich m_K zu

$$m_K = 3m_p + 3m_n \approx 6m_n \tag{35}$$

und daher ist die Energiedifferenz zwischen dem Ubergang $n = 2 \rightarrow n = 1$ gegeben durch

$$\Delta E_{^6\mathrm{Li}} = 91.8308eV$$

Daher:

$$\nu_{^6\text{Li}} = \frac{\Delta E_{^6\text{Li}}}{h} = 2.22044 \cdot 10^{16} s^{-1}$$
$$\lambda_{^6\text{Li}} = \frac{c}{\nu_{^6\text{Li}}} = 1.35015 \cdot 10^{-8} m$$

Hingegen für ^7Li ist

$$m_K = 3m_p + 4m_m \approx 7m_n \tag{36}$$

$$\Delta E_{^7\text{Li}} = 91.83208 eV$$

Daher:

$$\nu_{^7\text{Li}} = \frac{\Delta E_{^7\text{Li}}}{h} = 2.22047 \cdot 10^{16} s{-}1$$
$$\lambda_{^7\text{Li}} = \frac{c}{\nu_{^7\text{Li}}} = 1.35013 \cdot 10^{-8} m$$

Daher beträgt die absolute Wellenlängen- und Frequenzänderung:

$$\Delta\lambda = 2 \cdot 10^{-13} m$$

$$\Delta\nu = 3 \cdot 10^{11} s^{-1}$$

wohingegen

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 10^{-5}$$

Aufgabe 6

a) In einem äußerem Magnetfeld spaltet der Grundzustand des Wasserstoffatoms aufgrund des magnetischen Spinmoments des Elektrons gemäß

$$E(m_s) = E_R + m_s g_s \mu_B \cdot B, m_s = \pm\frac{1}{2} \tag{37}$$

in zwei Zeemann-Niveaus auf. Um Übergänge zwischen diesen Niveaus aus zu induzieren, müssen Photonen eingestrahlt werden, deren Energie gleich der Energiedifferenz der Zeemann-Niveaus ist:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} \overset{!}{=} E(+1/2) - E(-1/2) = g_s\mu_B \cdot B$$

$$\Rightarrow B = \frac{hc}{\lambda g_s \mu_B} = 0.357\text{T}$$

Dabei wurde $g_s = 2$ und $\mu_B = 9.274 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}$ benutzt.

b) In einer semiklassischen Beschreibung präzediert der Spin des Elektrons mit der Lamorfrequenz ω_L um die Magnetfeldrichtung, die sich aus der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} = -\frac{g_s \mu_B}{\hbar}\vec{L} \times \vec{B} \tag{38}$$

zu

$$\omega_L = \frac{g_s \mu_B B}{\hbar} \tag{39}$$

ergibt. Die ist gerade die Kreisfrequenz der eingestrahlten Mikrowellenstrahlung in der Resonanz. Man kann das Auftreten der Resonanz daher so deuten, dass die zeitliche Änderung des elektromagnetischen Felds der Mikrowellenstrahlung und die Präzession des magnetischen Moments des Elektrons in Phase sind, was die resonante Aufnahme und Abgabe von Energie ermöglicht.

Aufgabe 7

Es wurde wurde bereits die Proportionalität des magnetischen Moments μ mit dem Drehimpuls $\vec{l}$ klassisch hergeleitet:

$$\vec{\mu} = -\frac{q}{2m}\vec{l} = -\frac{e}{2m_e}\vec{l} = -\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{l} \tag{40}$$

Korrespondierend dazu berechnen wir nun nach dem Biot-Savart-Gesetz das Magnetfeld, das durch den Umlauf des Protons erzeugt wird. Beginnend bei der Formulierung, die von einer stromdurchflossenen Leiterschleife ausgeht, erhält man:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\vec{r} \times \vec{r}}{r^3} \tag{41}$$

$$I = \frac{Q}{T} \tag{42}$$

$$\vec{I} = \frac{Q \cdot \vec{\nu}}{2\pi r} \tag{43}$$

$$\int_C d\vec{r} = 2\pi r \tag{44}$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi}\frac{\vec{\nu} \times \vec{r}}{r^3} \tag{45}$$

wobei ausgenutzt wird, dass die Winkelbeziehung zwischen dr und r auf der Kreisbahn konstant ist und daher $\frac{d\vec{r} \times \vec{r}}{r^3}$ aus der Integration herausgezogen werden kann. Dies führt zu einer alternativen Formulierung des Biot-Savart-Gesetzes:

$$\vec{B}_l = \frac{\mu_0 Z e}{4\pi r^3}\vec{\nu} \times \vec{r} = \frac{\mu_0 Z e}{4\pi r^3 m_e}\vec{l} \tag{46}$$

Hierbei ist

$$\vec{l} = m\vec{v} \times \vec{r} \tag{47}$$

Ein typischer Zahlenwert sei hier für das Wasserstoffatom genannt: Mit (in geeigneten Einheiten)

- Z = 1,
- $r = a_0 = 0.529 \cdot 10^{-10}$m,
- $|\vec{l}| = 197$ MeVfm/c,
- $m_e = 511$ keV$/c^2$

ergibt sich

$$B_l = 12.46 \frac{Vs}{m^2} = 12.46T \tag{48}$$

dabei sollte strenggenommen $|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$ verwendet werden, allerdings trägt später sowieso nur das Skalarprodukt mit $\vec{s}$ bei, welches wir dann korrekt behandeln. Tatsächlich muss dieses Feld in das Laborsystem transformiert werden, woraus sich ein zusätzlicher Faktor $\frac{1}{2}$ – der sogenannte Thomas-Faktor – (aus der Vorlesung) ergibt. Mit diesem weiter gerechnet erhält man für die Modifikation der Energie:

$$\Delta E = \mu_s \cdot \frac{1}{2}\vec{B}_l = g_s \cdot \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \left(\vec{s} \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}\right) \frac{B_l}{2} \tag{49}$$

Für die Beispielwerte erhalten wir mit g$_s = 2$ und abgeschätzt $\vec{s} \cdot \vec{l} = s_z \cdot l_z$:

$$\Delta E = 2 \cdot \frac{e\hbar}{2m_e} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12.5\mathrm{T}}{2} = 3.62 \cdot 10^{-3}\mathrm{eV} \tag{50}$$

Die Großschreibung von L, J und S suggeriert, dass es sich um den Drehimpulse der Atomhülle und nicht nur eines einzelnen Elektrons handelt. Daher verwendet die Lösung l, s und j. Betrachten wir nun die Aufspaltung der Energieniveaus etwas genauer: Anstelle der Abschätzung $\vec{s} \cdot \vec{l} = s_z \cdot l_z$ wollen wir nun beide Modifikationen mittels dem Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ betrachten. In unserem Fall ist $l = 1$, $s = \frac{1}{2}$, $j = l \pm s$. Wir nutzen die Vektoridentität

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}\left(\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2\right) \tag{51}$$

$$= \frac{1}{2}\hbar^2(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) \tag{52}$$

Unsere Zahlen eingesetzt erhalten wir

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \begin{cases} \frac{1}{2}\hbar^2 & \text{für } j = \frac{3}{2} \\ -\hbar^2 & \text{für} j = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{53}$$

Die Energieniveaus $E_{n,l,s}$ ergeben sich damit zu

$$E_{n,j} = E_n + \frac{a}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) \tag{54}$$

$$E_{n,3/2} = E_n + \frac{a}{2} \tag{55}$$

$$E_{n,1/2} = E_n - a \tag{56}$$

Damit erhält man den Wert a aus der Energieaufspaltung. Der energiereichere Zustand ist der mit der kürzeren Wellenlänge bei der Abregung, d.h.

$$\Delta E = \frac{3}{2}a \tag{57}$$

$$\Delta E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} - \frac{2\pi\hbar c}{\lambda + \Delta\lambda} = 2\pi\hbar c\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda}\right) = 0.069eV \tag{58}$$

$$a = 0.046eV \tag{59}$$

Das Z aus der Formel ist übrigens eine effektive Kernladung, die von der Abschirmung und damit von (in erster Linie dem Radialanteil) der Wellenfunktion des jeweiligen Zustands abhängig ist. Einfaches Einsetzen der Protonenzahl von Cs führt also nicht zu dem gewünschten Ergebnis.

Allgemein erhält man bei einer Aufspaltung in zwei Niveaus durch die Spin-Bahn-Kopplung mit $s = \frac{1}{2}$, $j = l \pm s$ als Vorfaktor

$$\Delta E_{l+\frac{1}{2}} = \frac{a}{2}\left((l+\frac{1}{2})(l+\frac{3}{2}) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right) \tag{60}$$

$$= \frac{a}{2}(l^2 - 2l + \frac{3}{4} - l^2 - l - \frac{3}{4}) = \frac{a}{2}l \tag{61}$$

$$\Delta E_{l-\frac{1}{2}} = \frac{a}{2}\left((l-\frac{1}{2})(l+\frac{1}{2}) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right) \tag{62}$$

$$= \frac{a}{2}(l^2 - \frac{1}{4} - l^2 - l - \frac{3}{4}) = -\frac{a}{2}(l+1) \tag{63}$$

Die Anzahl der magnetischen Unterzustände ist $2j+1$. Damit erhält man für die beiden Niveaus:

$$\Delta N_{l+\frac{1}{2}} = 2(l+\frac{1}{2}) + 1 = 2(l+1) \tag{64}$$

$$\Delta N_{l-\frac{1}{2}} = 2(l-\frac{1}{2}) + 1 = 2l \tag{65}$$

Das Gewichtete Energiemittel ist nun

$$\langle\Delta E\rangle = \frac{1}{N_{ges}}(\Delta E_{l+\frac{1}{2}}N_{l+\frac{1}{2}} + \Delta E_{l-\frac{1}{2}}N_{l-\frac{1}{2}}) \tag{66}$$

$$\langle\Delta E\rangle = \frac{1}{N_{ges}}\frac{a}{2} \cdot 2 \cdot (l(l+1) - (l+1)l) = 0. \tag{67}$$

Der „Energieschwerpunkt “wird also nicht verschoben.