FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 4

Musterlösung 1 - Grundlagen der Quantenmechanik

Hannah Schamoni

1 Kurze Fragen zum Aufwärmen

a) Warum spielen die Welleneigenschaften bei einem fahrenden PKW ($m = 1$ t, $v = 100$ km/h) keine Rolle?

b) Schätze die Energie von Lichtquanten (in eV) im Mikrowellenbereich ($\lambda = 500\ \mu$m), im sichtbaren Bereich ($\lambda = 500$ nm) und im Röntgenbereich ($\lambda = 0.5$ nm) ab.

c) Kann man den Aufenthaltsort eines quantenmechanisch beschriebenen Teilchens zu einem beliebigen Zeitpunkt vorherbestimmen? Begründe die Antwort!

d) Welchen physikalischen Inhalt hat die Normierung der Lösung der Schrödingergleichung?

e) Nenne Naturbeobachtungen, die klassisch nicht zu erklären sind, aber durch die Quantentheorie richtig beschrieben werden können.

Lösung

a) Die Wellenlänge λ erhält man aus der de-Broglie-Beziehung ($h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js):

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 2 \cdot 10^{-38}\ \text{m}$$

λ ist so extrem klein, dass die typischen Welleneigenschaften, wie Interferenz und Beugung, nicht beobachtet werden können.

b) Aus $E = h\nu$ folgt mit $\nu = \frac{c}{\lambda}$:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

Die Abschätzung ergibt:

	λ	E
Mikrowellen	500 μm	2.5 meV
Sichtbares Licht	500 nm	2.5 eV
Röntgenstrahlung	0.5 nm	2.5 keV

c) Nein, die Schrödingergleichung gestattet nicht, den wirklichen Aufenthaltsort eines Teilchens zu berechnen. Sie liefert nur Aufenthaltswahrscheinlichkeiten, also statistische Aussagen.

d) Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen irgendwo anzutreffen, ist Gewissheit, also gleich 1.

e) Welleneigenschaften von Teilchen (z.B. Elektronenbeugung), diskrete Energiezustände im Atom (z.B. Linienspektren), Aufenthalt von Teilchen in klassisch verbotenen Bereichen, Tunneleffekt (z.B. Feldelektronenemission, α-Strahlung beim radioaktiven Zerfall).

2 Welle-Teilchen-Dualismus

a) Ein Körper mit einer Masse von 5 g habe eine Geschwindigkeit von 100 m/s (z.B. eine Gewehrkugel). Wie breit müsste ein Spalt sein, um ein Beugungsmuster zu erhalten? Ist das möglich?

b) Ein Neutron habe eine kinetische Energie von 10 MeV. Welche Größe hat ein Objekt, an dem man die Beugung dieses Neutrons beobachten kann, wenn man es als Target verwendet? Ist das möglich?

Lösung

Für die Beugung müssen die Breite der Öffnung d und die Wellenlänge λ vergleichbar sein.

a) $d \approx \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \approx 1.325 \cdot 10^{-33}$ m. Der Durchmesser eines Atomkerns liegt in der Größenordnung von 10^{-15} m. Kein Körper der Masse 5 g kann an einer solchen (nicht existenten) Öffnung gestreut werden.

b) Aus der kinetischen Energie erhält man wegen $v = \sqrt{2E_{kin}/m}$ etwa $4.37 \cdot 10^7$ m/s. Aus der de-Broglie-Beziehung folgt $\lambda = h/p \approx 9.05 \cdot 10^{-15}$ m. Ein Atomkern kann also Neutronenbeugung hervorrufen.

3 Unschärferelation

a) Nimm an, der Impuls eines Teilchens wird mit einer Genauigkeit von $1 : 1000$ gemessen. Wie groß ist die minimale Ortsunschärfe, wenn es sich um ein makroskopisches Teilchen der Masse 5 g und der Geschwindigkeit 2 m/s handelt? Wie groß ist die minimale Ortsunschärfe, wenn es sich um ein Elektron mit der Geschwindigkeit 10^4 km/s handelt?

b) Wie groß ist die minimale Energieunschärfe eines Wasserstoffatoms, das sich in einem angeregten Zustand mit der Lebensdauer 10^{-8} s befindet? Wie groß ist die minimale Unschärfe in der Wellenlänge des beim Übergang in den Grundzustand emittierten Lichts, wenn die Energie des angeregten Zustands 3.39 eV beträgt?

c) Das Z_0, das Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung, ist extrem kurzlebig. Im Experiment zeigt es eine Energieunschärfe von ca. 2.5 GeV. Wie groß ist seine Lebensdauer, wenn man davon ausgeht, dass das durch die Unschärferelation gegebene Limit erfüllt ist?

Lösung

a) Es gilt die Unschärferelation zwischen Ort und Impuls:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

Gemäß Angabe ist $\Delta p = \epsilon p$ mit $\epsilon = 0.001$. Außerdem ist $p = mv$. Also:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\epsilon m v}$$

Einsetzen von $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ Js, $m = 0.005$ kg und $v = 2$ m/s ergibt

$$\Delta x \geq 1.05 \cdot 10^{-29} \text{ m.}$$

Diese Ortsunschärfe ist in allen realistischen Situationen völlig vernachlässigbar. Einsetzen von $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg und $v = 10^4$ km/s ergibt

$$\Delta x \geq 1.16 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

Die Ortsunschärfe liegt also im Nanometerbereich und kann unter Umständen von Bedeutung sein.

b) Es gilt die Unschärferelation zwischen Energie und Zeit:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \qquad \Rightarrow \qquad \Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t}$$

Einsetzen von $\hbar$ und $\Delta t = 10^{-8}$ s ergibt

$$\Delta E \geq 1.05 \cdot 10^{-26} \text{ J} = 6.59 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$$

Dies ist selbst in Elektronenvolt ein kleiner Wert. Das bedeutet, dass 10^{-8} s im atomaren Bereich eine recht große Lebensdauer darstellt.
Um aus der gegebenen Energieunschärfe die Wellenlängenunschärfe des emittierten Photons zu berechnen, benötigt man den Zusammenhang zwischen Energie und Wellenlänge für Photonen. Dieser ergibt sich aus

$$E = \hbar\omega \ , \ \omega = kc \ , \ k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Also:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

bzw.

$$\lambda = \frac{hc}{E}$$

Durch Ableiten findet man daraus die Relation zwischen den (kleinen) Unschärfen ΔE und $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \frac{hc}{E^2}\Delta E$$

Das Minuszeichen wurde hier unterdrückt, da Unschärfen per Definition positiv sind. Einsetzen von h, c, E und ΔE ergibt:

$$\Delta\lambda = 7.09 \cdot 10^{-6} \text{ nm},$$

was wiederum eine sehr kleine Wellenlängenunschärfe ist.

c) Es soll das Limit der Unschärferelation zwischen Energie und Zeit erfüllt sein, also:

$$\Delta E \Delta t = \hbar \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = \frac{\hbar}{\Delta E}.$$

Einsetzen von $\hbar$ und $\Delta E = 2.5$ GeV ergibt

$$\Delta t = 2.64 \cdot 10^{-25} \text{ s}.$$

Dies ist auch in subatomaren Zuständen eine eher kurze Lebensdauer - was mit der sehr großen Energieunschärfe zusammenhängt.

4 Schrödingergleichung

Die lineare Schwingung der Atomkerne in einem zweiatomigen Molekül kann durch eine eindimensionale Schrödingergleichung für den Abstand r der beiden Kerne beschrieben werden. Die gegenseitige Abstoßung der Kerne und die durch die Elektronen vermittelte Bindungskraft ist näherungsweise gegeben durch ein Potential der Form

$$V(r) = D\left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)^2 , \quad D, a, r_0 > 0$$

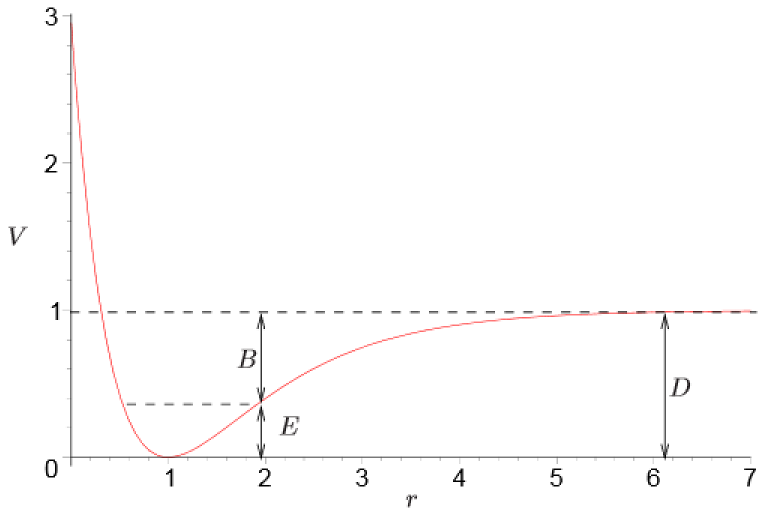
a) Fertige eine Skizze an, die den Potentialverlauf qualitativ wiedergibt.

b) Wenn man das Potential um sein Minimum herum bis zur quadratischen Ordnung entwickelt, dann kann man mit dem Ansatz $\varphi(r) = e^{-b(r-r_0)^2}$ die zeitunabhängige Schrödingergleichung lösen. Bestimme den Parameter b und die Energie E des Zustands φ.
Hinweise: In die Schrödingergleichung für r ist die reduzierte Masse $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ einzusetzen. Es ist $V''(r_0) = 2a^2 D$.

c) Zeichne D, das in **b)** berechnete E sowie die Bindungsenergie B des Moleküls im Zustand φ qualitativ in die Skizze aus **a)** ein. Gib B an.

Lösung

a) + c) In der folgenden Abbildung ist das Potential für die Parameterwerte $D = a = r_0 = 1$ dargestellt.



b) Die Taylorentwicklung von $V(r)$ bis zur zweiten Ordnung um den Minimumspunkt r_0 lautet

$$U(r) = V(r_0) + (r - r_0)V'(r_0) + \frac{1}{2}(r - r_0)^2 V''(r_0)$$

Es ist

$$V(r_0) = 0 \ , \ V'(r_0) = 0 \ , \ V''(r_0) = 2a^2 D,$$

also ist das quadratische Ersatzpotential

$$U(r) = a^2 D (r - r_0)^2.$$

Die zugehörige Schrödingergleichung ist

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + a^2 D(r-r_0)^2\right)\varphi(r) = E\varphi(r)$$

Für den Ansatz

$$\varphi(r) = e^{-b(r-r_0)^2}$$

berechnet man

$$\varphi'(r) = -2b(r-r_0)e^{-b(r-r_0)^2}$$
$$\varphi''(r) = (4b^2(r-r_0)^2 - 2b)e^{-b(r-r_0)^2}$$

Einsetzen in die Schrödingergleichung führt auf

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}(4b^2(r-r_0)^2 - 2b) + a^2 D(r-r_0)^2 = E$$

Damit dies für alle $r - r_0$ erfüllt sein kann, muss der Koeffizient von $(r - r_0)^2$ verschwinden:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}4b^2 + a^2 D = 0,$$

also

$$b = \frac{a}{\hbar}\sqrt{\frac{D\mu}{2}}$$

Die Energie des Zustands ergibt sich dann aus

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}(-2b) = E,$$

also

$$E = \frac{\hbar^2 b}{\mu} = \hbar a\sqrt{\frac{D}{2\mu}}$$

c) Die Bindungsenergie ist gegeben durch die Dissoziationsenergie D des Potentials vermindert um die Energie E im berechneten Zustand φ:

$$B = D - E = D - \hbar a\sqrt{\frac{D}{2\mu}}$$

5 Wellenfunktion

Die quantenmechanische Wellenfunktion eines Teilchens sei gegeben durch

$$\psi(x) = Ne^{-|x|/a}$$

a) Bestimme den Normierungsfaktor N so, dass die Wellenfunktion auf 1 normiert ist, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ |\psi(x)|^2 = 1$$

Warum ist die Interpretation von normierten Wellenfunktionen notwendig für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik? Welche Einheit hat die Wellenfunktion?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen am Ort $x = 0$ zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im kleinen Intervall $[0, dx]$ zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[0, a]$ zu finden?

Lösung

a) Damit die Wellenfunktion

$$\psi(x) = N e^{-|x|/a}$$

normiert ist, muss gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; |\psi(x)|^2 = |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-2|x|/a} = 2\,|N|^2 \int_{0}^{\infty} dx \; e^{-2x/a} =$$
$$2\,|N|^2 \left(-\frac{a}{2}\right) \left[e^{-2x/a}\right]_0^{\infty} = |N|^2 \, a \stackrel{!}{=} 1$$

Also ist bis auf einen konstanten Phasenfaktor:

$$N = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Die normierte Wellenfunktion lautet damit:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-|x|/a}$$

Nur wennn die Wellenfunktion normiert ist, lässt sich $|\psi(x)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte deuten, da das Integral einer Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte über die gesamte reelle Achse 1 ergeben muss.
$|\psi(x)|^2$ ist eine eindimensionale Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte, hat also die Dimension $1/\mathrm{m}$. Daher hat ψ selbst die Dimension $1/\sqrt{\mathrm{m}}$.

b) Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen exakt an einem Ort zu finden, ist Null. Das ist immer bei kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen so. $|\psi(0)|^2$ ist jedenfalls nicht die richtige Antwort, denn das ist ja schon von der Einheit her keine Wahrscheinlichkeit.
Für das kleine Intervall $[0, dx]$ kann man näherungsweise den Wert der Wahrscheinlichkeitsdichte bei $x = 0$ mit der Intervallbreite dx multiplizieren:

$$w = |\psi(0)|^2 \, dx = \frac{1}{a} dx = \frac{dx}{a}$$

Klarerweise ist dies nur eine brauchbare Näherung, wenn $dx \ll a$ ist.
Für das Intervall $[0, a]$ muss man das entsprechende Integral berechnen:

$$w = \int_0^{\infty} dx \; \left|\frac{1}{\sqrt{a}} e^{-|x|/a}\right|^2 = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} dx \; e^{-2x/a} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right) = 0.432\ldots,$$

unabhängig von a.

6 Potentialschwelle/-barriere

Ein Teilchen bewege sich in einem Potential V, das bei $x = 0$ eine Schwelle der Höhe V_0 aufweist, also gegeben ist durch

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} .$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit p wird ein von links ($x < 0$) kommendes Teilchen mit der kinetischen Energie E an der Potentialschwelle reflektiert, wenn $E > V_0$ ist?
Hinweis: Löse die zeitunabhängige Schrödingergleichung links und rechts von der Potentialschwelle durch Ansätze der Form $\alpha_i \cdot e^{q_i x}$ und bestimme die Amplituden α_i aus der Bedingung, dass die Wellenfunktion und ihre erste Ableitung bei $x = 0$ stetig sein müssen.

b) Wie sieht die Wellenfunktion im Fall $E < V_0$ aus?

c) Nun soll statt einer Potentialstufe eine Potentialbarriere betrachtet werden, d.h. ein Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{für } x > a \end{cases} .$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein von links kommendes Teilchen mit Energie $E < V_0$ die Barriere durchdringt (Tunneleffekt)?

d) Wie würde sich ein klassisches Teilchen in den Fällen **a)**, **b)** und **c)** verhalten?

Lösung

a) Die zeitunabhängige Schrödingergleichung lautet für ein konstantes Potential V

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V\right)\psi = E\psi \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi$$

Der Lösungsansatz $\psi = A \cdot e^{qx}$ führt auf

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = q^2 A e^{qx} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)Ae^{qx}$$

$$\Rightarrow \quad q^2 = -\frac{2m(E - V)}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \quad q = \begin{cases} \pm i\sqrt{2m(E - V)}/\hbar & \text{für } E > V \\ \pm\sqrt{2m(V - E)}/\hbar & \text{für } E < V \end{cases} .$$

Im vorliegenden Fall ist im Bereich I $V = 0 < E$ und im Bereich II $V = V_0 < E$, d.h. links und rechts von der Potentialschwelle hat man ebene Wellen als Lösung der Schrödingergleichung. Die gesuchte Lösung soll sich zusammensetzen aus einer einfallenden, einer reflektierten und einer transmittierten Welle. Die Amplitude der einfallenden Welle wird willkürlich 1 gesetzt. Damit hat man

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ik_1 x} + Ae^{-ik_1 x} & \text{für } x < 0 \\ Be^{ik_2 x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

mit $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$ und $k_2 = \sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar$. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen reflektiert wird, ergibt sich aus dem Verhältnis der Betragsquadrate der einfallenden und der reflektierten Welle:

$$p = \frac{\left|Ae^{-ik_1x}\right|^2}{\left|e^{ik_1x}\right|^2} = |A|^2$$

Es bleibt also, die Amplituden A und B zu bestimmen. Bei $x = 0$ müssen $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ stetig sein:

$$\begin{aligned} \psi_I(0) &= \psi_{II}(0) \\ \psi_I'(0) &= \psi_{II}'(0) \end{aligned}$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned} 1 + A &= B \\ 1 - A &= \frac{k_2}{k_1}B \quad \text{(wegen } ik_1 - Aik_1 = Bik_2\text{)} \end{aligned}$$

Man addiert die beiden Ausdrücke, um B zu erhalten:

$$1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{2}{1 + k_2/k_1} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}}$$

Man subtrahiert die beiden Ausdrücke und erhält für A:

$$A = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)B = \frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}}$$

Die Wellenfunktion lautet also

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ik_1x} + \frac{1-\sqrt{1-V_0/E}}{1+\sqrt{1-V_0/E}}e^{-ik_1x} & \text{für } x < 0 \\ \frac{2}{1+\sqrt{1-V_0/E}}e^{ik_2x} & \text{für } x > 0 \end{cases} .$$

Und für die Reflexionswahrscheinlichkeit erhält man

$$p = |A|^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}}\right)^2 .$$

b) Im Falle $E < V_0$ ist die Lösung von der Form

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Ae^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ Be^{qx} + Ce^{-qx} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

mit $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ und $q = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. Damit die Wellenfunktion normierbar ist, muss $B = 0$ sein. Die Stetigkeitsbedingungen für $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ bei $x = 0$ liefern

$$\begin{aligned} 1 + A &= C \\ 1 - A &= \frac{iq}{k}C \quad \text{(wegen } ik(1 - A) = -qC\text{)} \end{aligned}$$

Man addiert die beiden Ausdrücke, um C zu erhalten:

$$1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{iq}{k}\right)C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2}{1 + iq/k} = \frac{2}{1 + i\sqrt{V_0/E - 1}}$$

Man subtrahiert die beiden Ausdrücke und erhält für A:

$$A = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{iq}{k}\right) C = \frac{1 - iq/k}{1 + iq/k} = \frac{1 - i\sqrt{V_0/E - 1}}{1 + i\sqrt{V_0/E - 1}}.$$

Die Wellenfunktion lautet also

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + \frac{1-i\sqrt{V_0/E-1}}{1+i\sqrt{V_0/E-1}} e^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ \frac{2}{1+i\sqrt{V_0/E-1}} e^{-qx} & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

Und die Reflexionswahrscheinlichkeit ist 1:

$$p = |A|^2 = AA^* = \frac{1 - i\sqrt{V_0/E - 1}}{1 + i\sqrt{V_0/E - 1}} \cdot \frac{1 + i\sqrt{V_0/E - 1}}{1 - i\sqrt{V_0/E - 1}} = 1$$

c) Ist der Bereich II, in dem $V > E$ gilt, von endlicher Breite, so schließt sich an die in diesem Bereich gemäß e^{-qx} exponentiell abfallende Wellenfunktion bei $x = a$ wieder eine ebene Welle an, d.h. es existiert eine endliche Wahrscheinlichkeit, dass ein auf die Potentialbarriere zulaufendes Teilchen diese durchdringt. Näherungsweise ergibt sich die Tunnelwahrscheinlichketi T aus den Amplituden der exponentiell abfallenden Wellenfunktion bei $x = 0$ und $x = a$:

$$T = \left|\frac{\psi(a)}{\psi(0)}\right|^2 \approx e^{-2qa} = \exp\left(-2a\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}\right).$$

Dies gilt nur näherungsweise, da - um die Stetigkeit der Ableitung $\psi'(a)$ zu gewährleisten - im Bereich II auch eine exponentiell ansteigende Komponente auftritt. Diese Komponente führt insbesondere dazu, dass die Reflexionswahrscheinlichkeit um die Tunnelwahrscheinlichkeit vermindert wird. Das Ergebnis für die Tunnelwahrscheinlichkeit ändert sich bei korrekter (elementarer aber langwieriger!) Rechnung nicht wesentlich.

d)
- **a)** Das Teilchen würde zu 100 % mit verminderter Geschwindigkeit transmittiert. Die endliche Reflexionswahrscheinlichkeit ist ein reiner Quanteneffekt.
- **b)** Das Teilchen würde wie im quantenmechanischen Fall zu 100 % reflektiert.
- **c)** Auch hier würde das Teilchen zu 100 % reflektiert. Der Tunneleffekt ist rein quantenmechanischer Natur.

7 Kastenpotential

Gegeben sei ein eindimensionales Kastenpotential mit einer Breite von $a = 10^{-15}$ m, d.h. für das Potential gilt:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimme die Nullpunktsenergie eines in diesem Potential eingeschlossenen Neutrons ($m_n = 1.67493 \cdot 10^{-27}$ kg). Skizziere die Lösung.

b) Nimm nun an, dass das Potential eine endliche Höhe hätte. Was bedeutet dies qualitativ für das Teilchen?

Lösung

a) Die Schrödingergleichung lautet

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi - k^2\psi = 0$$

mit $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. Die Lösungen sind

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

Man erhält mit Hilfe der Randbedingungen $\psi(x) = 0$ bei $x = 0$ und $x = a$:

$$\psi(0) = A + B \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \psi = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) = 2iA\sin kx$$

$$\psi(a) = Ae^{ika} + Be^{-ika} \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow 2iA\sin ka = 0$$
$$\Rightarrow ka = n\pi\ ,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Damit ergibt sich für ψ_n

$$\psi_n = 2iA\sin\frac{n\pi}{a}x$$

und für die Energie E_n

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2 n^2}{a^2} = E_0 \cdot n^2$$

mit der Nullpunktsenergie E_0. Für den speziellen Fall des Neutrons erhält man

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2} = \ldots = 3.277 \cdot 10^{-11}\ \text{J} \widehat{=} 204.4\ \text{MeV}.$$

b) Die Teilchen können nun etwas in den Bereich außerhalb des Kastens eindringen. Dadurch ändert sich die Wellenfunktion. Die Randbedingungen $\psi(0) = \psi(a) = 0$ gelten nicht mehr. Die Wellenlänge wird größer und damit die Energien kleiner.

8 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

a) Berechne den Erwartungswert für den Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$$

mit Hilfe der Wellenfunktion

$$\psi_\lambda(x) = Ae^{-\lambda x^2}$$

Tipp:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot e^{-ax^2} = 1$$

b) Minimiere das Ergebnis hinsichtlich λ und zeige, dass man die Grundzustandsenergie E_0 des harmonischen Oszillators für $\lambda = \lambda_{min}$ erhält. Was stellt $\psi_{\lambda_{min}}$ dar?

Lösung

a) Zunächst muss die Wellenfunktion normalisiert werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \ |\psi_\lambda|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ |A|^2 \, e^{-2\lambda x^2} \stackrel{!}{=} 1$$

Mit dem Tipp und $a = 2\lambda$ ergibt sich

$$A = \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{1/4}$$

Danach wird der Erwartungswert $\langle \hat{H} \rangle = E_\lambda = \int \psi \hat{H} \psi$ berechnet (da ψ reell ist, gilt $\psi^* = \psi$):

$$\begin{aligned}
E_\lambda &= \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \ e^{-\lambda x^2} \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right] e^{-\lambda x^2} \\
&= \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \ e^{-2\lambda x^2} \left[-\frac{\hbar^2}{2m}(4\lambda^2 x^2 - 2\lambda) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right] \\
&= \text{(geschickt zusammenfassen, partiell integrieren und Tipp ausnutzen)} \\
&= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} 4\lambda^2 + \frac{1}{2} m\omega^2\right) \frac{1}{4\lambda} + \frac{\hbar^2}{2m} 2\lambda \\
&= \frac{1}{8} m\omega^2 \frac{1}{\lambda} + \frac{\hbar^2}{2m} 2\lambda
\end{aligned}$$

b) Eine Minimierung der Energie führt zu

$$\frac{dE_\lambda}{d\lambda} = -\frac{1}{8} m\omega^2 \frac{1}{\lambda_{min}^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \stackrel{!}{=} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{min} = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

Eingesetzt in E_λ ergibt sich für die Energie

$$E_{\lambda_{min}} = \frac{1}{8} m\omega^2 \frac{2\hbar}{m\omega} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{m\omega}{2\hbar} = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

Dies ist die Grundzustandsenergie und die zugehörige Wellenfunktion $\psi_{\lambda_{min}}$ ist die Grundzustandseigenfunktion.

9 Rutherford-Streuung

Radium 226 ist ein α-Strahler mit einer Teilchenenergie von 4.78 MeV. Fünf Prozent der von 2 g ^{226}Ra emittierten α-Teilchen werden zu einem parallelen Strahl gebündelt und auf eine 0.005 mm dicke Kupferfolie ($Z_{Cu} = 29$, $\rho_{Cu} = 8.92$ g/cm^3) gelenkt. Ein Detektor mit einer quadratischen Öffnung der Seitenlänge 3 cm befindet sich im Abstand 3 m vom Auftreffpunkt des α-Strahls. Wie groß ist die Zählrate im Detektor für den Streuwinkel $\theta = 45°$?
Hinweis: Die Aktivität eines radioaktiven Stoffes erhält man durch Ableiten aus dem exponentiellen Zerfallsgesetz $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$ mit $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$.

Lösung

Die Zählrate ist

$$d\dot{N} = L\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega$$

mit der Luminosität L des Strahls, dem Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und dem vom Detektor abgedeckten (kleinen) Raumwinkelelement $d\Omega$.
Für die Luminosität muss man zuerst die Aktivität des Radiumpräparats berechnen. Aus dem exponentiellen Zerfallsgesetz folgt durch Ableiten

$$\dot{N}(t) = -\lambda N(0)e^{-\lambda t}.$$

Also ist die Aktivität zum Zeitpunkt $t = 0$ mit $N(0) = N_0$:

$$A = \left|\dot{N}(0)\right| = \lambda N_0$$

N_0 ergibt sich dabei aus der Masse des Präparats und der Molmasse von ^{226}Ra:

$$N_0 = \frac{m}{M_{Ra}}N_A$$

Von den emittierten α-Teilchen wird der Bruchteil $q = 0.05$ auf die Kupferfolie gelenkt, also ist der Teilchenstrom

$$J_N = qA.$$

Daraus ergibt sich die Luminosität des Strahls:

$$L = n_t d_t J_N$$

mit der Anzahldichte n_t der Streuzentren und der Dicke d_t des Targets. n_t erhält man aus der Massendichte und der Molmasse von Kupfer:

$$n_t = \frac{\rho_{Cu}}{M_{Cu}}N_A$$

Alles in allem:

$$L = \frac{\rho_{Cu}}{M_{Cu}}N_A d_t q\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\frac{m}{M_{Ra}}N_A = 1.54 \cdot 10^{33}\ \mathrm{m^{-2}s^{-1}}$$

Das Raumwinkelelement des Detektors ist

$$d\Omega = \frac{dF}{r^2} = \frac{(0.03\ \mathrm{m})^2}{(3\ \mathrm{m})^2} = 10^{-4}$$

Die Rutherfordsche Streuformel für $\theta = 45°$, α-Teilchen ($Z_1 = 2$), Kupfer ($Z_2 = 29$) und $E = 4.78$ MeV$= 7.66 \cdot 10^{-13}$ J lautet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 45°) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\cdot 29\cdot e^2}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(22.5°)} = \ldots = 8.92 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{m}^2$$

Damit folgt für die Zählrate:

$$d\dot{N} = L\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = 137.4\ \mathrm{Hz}$$

10 Vertauschungsrelation des Impulses

Zeige durch Anwendung der Komponenten von $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ auf $\psi(\mathbf{r})$ bzw. auf $\mathbf{r}\psi(\mathbf{r})$, dass gilt:

$$\frac{i}{\hbar}[p_\alpha, \beta] = \frac{i}{\hbar}(p_\alpha\beta - \beta p_\alpha) = \delta_{\alpha\beta}$$
$$\alpha, \beta = x, y, z$$

Lösung

Zunächst wird der Nabla-Operator ∇ auf $\mathbf{r}\psi(\mathbf{r})$ angewandt und man betrachtet die x-Komponente:

$$\nabla_x x\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) + x\nabla_x\psi(\mathbf{r}) \;\Leftrightarrow\; (\nabla_x x - x\nabla_x)\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})$$

Es folgt für x, y, z (hier nur für x gezeigt):

$$\frac{i}{\hbar}[p_x, x] = \frac{i}{\hbar}[-i\hbar\nabla_x, x] = [\nabla_x, x] = 1$$

Nun wird die y-Komponente betrachtet:

$$\nabla_y x\psi(\mathbf{r}) = x\nabla_y\psi(\mathbf{r}) \;\Leftrightarrow\; [\nabla_y, x]\,\psi(\mathbf{r}) = 0$$

Es folgt für x, y, z (hier nur für x gezeigt):

$$\frac{i}{\hbar}[p_y, x] = \frac{i}{\hbar}[-i\hbar\nabla_y, x] = [\nabla_y, x] = 0$$