FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 4

Übung 1 - Grundlagen der Quantenmechanik

Hannah Schamoni

1 Kurze Fragen zum Aufwärmen

a) Warum spielen die Welleneigenschaften bei einem fahrenden PKW ($m = 1$ t, $v = 100$ km/h) keine Rolle?

b) Schätze die Energie von Lichtquanten (in eV) im Mikrowellenbereich ($\lambda = 500\ \mu$m), im sichtbaren Bereich ($\lambda = 500$ nm) und im Röntgenbereich ($\lambda = 0.5$ nm) ab.

c) Kann man den Aufenthaltsort eines quantenmechanisch beschriebenen Teilchens zu einem beliebigen Zeitpunkt vorherbestimmen? Begründe die Antwort!

d) Welchen physikalischen Inhalt hat die Normierung der Lösung der Schrödingergleichung?

e) Nenne Naturbeobachtungen, die klassisch nicht zu erklären sind, aber durch die Quantentheorie richtig beschrieben werden können.

2 Welle-Teilchen-Dualismus

a) Ein Körper mit einer Masse von 5 g habe eine Geschwindigkeit von 100 m/s (z.B. eine Gewehrkugel). Wie breit müsste ein Spalt sein, um ein Beugungsmuster zu erhalten? Ist das möglich?

b) Ein Neutron habe eine kinetische Energie von 10 MeV. Welche Größe hat ein Objekt, an dem man die Beugung dieses Neutrons beobachten kann, wenn man es als Target verwendet? Ist das möglich?

3 Unschärferelation

a) Nimm an, der Impuls eines Teilchens wird mit einer Genauigkeit von $1 : 1000$ gemessen. Wie groß ist die minimale Ortsunschärfe, wenn es sich um ein makroskopisches Teilchen der Masse 5 g und der Geschwindigkeit 2 m/s handelt? Wie groß ist die minimale Ortsunschärfe, wenn es sich um ein Elektron mit der Geschwindigkeit 10^4 km/s handelt?

b) Wie groß ist die minimale Energieunschärfe eines Wasserstoffatoms, das sich in einem angeregten Zustand mit der Lebensdauer 10^{-8} s befindet? Wie groß ist die minimale Unschärfe in der Wellenlänge des beim Übergang in den Grundzustand emittierten Lichts, wenn die Energie des angeregten Zustands 3.39 eV beträgt?

c) Das Z_0, das Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung, ist extrem kurzlebig. Im Experiment zeigt es eine Energieunschärfe von ca. 2.5 GeV. Wie groß ist seine Lebensdauer, wenn man davon ausgeht, dass das durch die Unschärferelation gegebene Limit erfüllt ist?

4 Schrödingergleichung

Die lineare Schwingung der Atomkerne in einem zweiatomigen Molekül kann durch eine eindimensionale Schrödingergleichung für den Abstand r der beiden Kerne beschrieben werden. Die gegenseitige Abstoßung der Kerne und die durch die Elektronen vermittelte Bindungskraft ist näherungsweise gegeben durch ein Potential der Form

$$V(r) = D\left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)^2 \;, \quad D, a, r_0 > 0$$

a) Fertige eine Skizze an, die den Potentialverlauf qualitativ wiedergibt.

b) Wenn man das Potential um sein Minimum herum bis zur quadratischen Ordnung entwickelt, dann kann man mit dem Ansatz $\varphi(r) = e^{-b(r-r_0)^2}$ die zeitunabhängige Schrödingergleichung lösen. Bestimme den Parameter b und die Energie E des Zustands φ.
Hinweise: In die Schrödingergleichung für r ist die reduzierte Masse $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ einzusetzen. Es ist $V''(r_0) = 2a^2 D$.

c) Zeichne D, das in **b)** berechnete E sowie die Bindungsenergie B des Moleküls im Zustand φ qualitativ in die Skizze aus **a)** ein. Gib B an.

5 Wellenfunktion

Die quantenmechanische Wellenfunktion eines Teilchens sei gegeben durch

$$\psi(x) = N e^{-|x|/a}$$

a) Bestimme den Normierungsfaktor N so, dass die Wellenfunktion auf 1 normiert ist, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; |\psi(x)|^2 = 1$$

Warum ist die Interpretation von normierten Wellenfunktionen notwendig für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik? Welche Einheit hat die Wellenfunktion?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen am Ort $x = 0$ zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im kleinen Intervall $[0, dx]$ zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[0, a]$ zu finden?

6 Potentialschwelle/-barriere

Ein Teilchen bewege sich in einem Potential V, das bei $x = 0$ eine Schwelle der Höhe V_0 aufweist, also gegeben ist durch

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \;.$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit p wird ein von links ($x < 0$) kommendes Teilchen mit der kinetischen Energie E an der Potentialschwelle reflektiert, wenn $E > V_0$ ist?

Hinweis: Löse die zeitunabhängige Schrödingergleichung links und rechts von der Potentialschwelle durch Ansätze der Form $\alpha_i \cdot e^{q_i x}$ und bestimme die Amplituden α_i aus der Bedingung, dass die Wellenfunktion und ihre erste Ableitung bei $x = 0$ stetig sein müssen.

b) Wie sieht die Wellenfunktion im Fall $E < V_0$ aus?

c) Nun soll statt einer Potentialstufe eine Potentialbarriere betrachtet werden, d.h. ein Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{für } x > a \end{cases} \quad .$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein von links kommendes Teilchen mit Energie $E < V_0$ die Barriere durchdringt (Tunneleffekt)?

d) Wie würde sich ein klassisches Teilchen in den Fällen **a)**, **b)** und **c)** verhalten?

7 Kastenpotential

Gegeben sei ein eindimensionales Kastenpotential mit einer Breite von $a = 10^{-15}$ m, d.h. für das Potential gilt:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimme die Nullpunktsenergie eines in diesem Potential eingeschlossenen Neutrons ($m_n = 1.67493 \cdot 10^{-27}$ kg). Skizziere die Lösung.

b) Nimm nun an, dass das Potential eine endliche Höhe hätte. Was bedeutet dies qualitativ für das Teilchen?

8 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

a) Berechne den Erwartungswert für den Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$$

mit Hilfe der Wellenfunktion

$$\psi_\lambda(x) = Ae^{-\lambda x^2}$$

Tipp:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot e^{-ax^2} = 1$$

b) Minimiere das Ergebnis hinsichtlich λ und zeige, dass man die Grundzustandsenergie E_0 des harmonischen Oszillators für $\lambda = \lambda_{min}$ erhält. Was stellt $\psi_{\lambda_{min}}$ dar?

9 Rutherford-Streuung

Radium 226 ist ein α-Strahler mit einer Teilchenenergie von 4.78 MeV. Fünf Prozent der von 2 g ^{226}Ra emittierten α-Teilchen werden zu einem parallelen Strahl gebündelt und auf eine 0.005 mm dicke Kupferfolie ($Z_{Cu} = 29$, $\rho_{Cu} = 8.92$ g/cm^3) gelenkt. Ein Detektor mit einer quadratischen Öffnung der Seitenlänge 3 cm befindet sich im Abstand 3 m vom Auftreffpunkt des α-Strahls. Wie groß ist die Zählrate im Detektor für den Streuwinkel $\theta = 45°$?
Hinweis: Die Aktivität eines radioaktiven Stoffes erhält man durch Ableiten aus dem exponentiellen Zerfallsgesetz $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$ mit $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$.

10 Vertauschungsrelation des Impulses

Zeige durch Anwendung der Komponenten von $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ auf $\psi(\mathbf{r})$ bzw. auf $\mathbf{r}\psi(\mathbf{r})$, dass gilt:

$$\frac{i}{\hbar}[p_\alpha, \beta] = \frac{i}{\hbar}(p_\alpha\beta - \beta p_\alpha) = \delta_{\alpha\beta}$$
$$\alpha, \beta = x, y, z$$