

# FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 4

Vorlesung 1 am 02.09.2013

## Grundlagen der Quantenmechanik

Hannah Schamoni

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Der Welle-Teilchen-Dualismus</b>	<b>2</b>
1.1	Wellenpakete . . . . .	2
1.2	Heisenbergsche Unschärferelation . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Grundlegende Begriffe der Quantenmechanik</b>	<b>4</b>
2.1	Zustand, Observablen, Operator, Erwartungswert . . . . .	4
2.2	Eigenfunktion und Eigenwerte . . . . .	5
2.3	Schrödingergleichung und spezielle Lösungen . . . . .	5
2.4	Quantenmechanischer Drehimpuls . . . . .	6
2.5	Spin . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Fermionen und Bosonen</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Streuung</b>	<b>8</b>
4.1	Grundbegriffe . . . . .	8
4.2	Rutherford-Streuung . . . . .	9

# 1 Der Welle-Teilchen-Dualismus

Während Effekte wie der Photo- und der Comptoneffekt auf einen Teilchencharakter des Lichts schließen lassen, deuten beispielsweise Beugungsexperimente auf einen Wellencharakter hin. Man spricht daher vom **Welle-Teilchen-Dualismus** des Lichts. Dies äußert sich auch im Zusammenhang von Energie  $E$  und Kreisfrequenz  $\omega$  bzw. von Impuls  $\vec{p}$  und Wellenvektor  $\vec{k}$ :

$$E = \hbar\omega \quad (1)$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (2)$$

Analog dazu gibt es Experimente, die Teilchen wie Elektronen oder Neutronen einen Wellencharakter zuordnen, so dass für "klassische" Teilchen ebenfalls der Welle-Teilchen-Dualismus gilt. Wendet man Gleichung (2) auf diese Teilchen der Masse  $m$  an, lässt sich ihnen eine Wellenlänge  $\lambda$ , die **de-Broglie-Wellenlänge**, zuordnen:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}} \quad (3)$$

Beispielsweise gilt somit auch für Beugung von Elektronen an einem Kristallgitter die Bragg-Bedingung,  $2d \sin \theta = n\lambda$ .

## 1.1 Wellenpakete

Eine zu Lichtwellen analoge Darstellung von **Materiewellen** sind ebene Wellen:

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - kx)} = \psi_0 e^{i(Et - px)/\hbar} \quad (4)$$

Mit den Gleichungen (1) und (2) sowie  $E = p^2/2m$  ergibt sich die **Phasengeschwindigkeit** dieser Welle zu

$$v_{ph} := \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{1}{2}v_T, \quad (5)$$

d.h. die Phasengeschwindigkeit ist gleich der halben Teilchengeschwindigkeit  $v_T$  und somit *nicht* unabhängig vom Teilchenimpuls. Im Gegensatz zu elektromagnetischen Wellen zeigen Teilchenwellen also **Dispersion**. Außerdem ist  $\psi$  aus Gleichung (4) nicht normierbar, was aber eine Bedingung für die Beschreibung von Teilchen mit einer Wellenfunktion ist.

Dieses Problem wird durch die Beschreibung als **Wellenpaket**, also als Überlagerung ebener Wellen mit verschiedenen Wellenzahlen  $k$ , gelöst:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \quad (6)$$

Alle vorkommenden Wellenzahlen sollen im Intervall  $[k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$  um das Maximum  $k_0$  liegen und werden mit dem Amplitudenfaktor  $A(k)$  gewichtet.

***Bemerkung:** In der Quantenmechanik werden Systeme über Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben.  $|\psi|^2$  kann als Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchen am Ort  $x$  zur Zeit  $t$  interpretiert werden.*

Nimmt man für alle Wellenzahlen im Intervall  $\pm\Delta k$  um  $k_0$  (und  $\Delta k \ll k_0$ ) nahezu konstante Amplituden  $A(k) \approx A(k_0)$  an, kann man  $\omega(k)$  Taylor-entwickeln, wobei höhere Terme vernachlässigt werden:

$$\omega(k) = \omega_0 + \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} (k - k_0) + \dots \quad (7)$$

Das Integral aus Gleichung (6) kann elementar gelöst werden und es ergibt sich die Gleichung für ein Wellenpaket, wie es in Abbildung 1.1 dargestellt ist:

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} A(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{\sin(\Delta k (\omega_0 t' - x))}{\omega_0 t' - x} \quad (8)$$

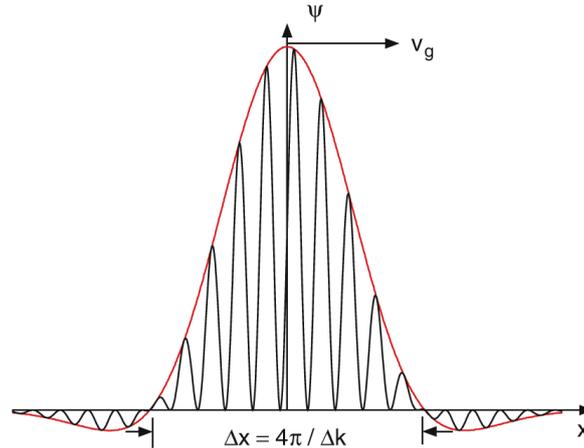


Abbildung 1: Wellenpaket als Überlagerung unendlich vieler Wellen mit Wellenzahlen im Bereich  $k_0 \pm \Delta k$  mit konstanter Amplitude  $A(k) = A(k_0)$  der Teilwellen.

Bei  $\omega_0 t' - x = 0$  befindet sich ein Maximum, welches sich mit der **Gruppengeschwindigkeit**  $v_{gr}$  fortbewegt,

$$v_{gr} = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v_T, \quad (9)$$

die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets ist gleich der Teilchengeschwindigkeit  $v_T$ . Wellenpakete sind also eine geeignete Beschreibung des Wellencharakters von Teilchen. Aufgrund der oben erwähnten Dispersion behält ein Wellenpaket seine Form nicht, sondern läuft mit der Zeit auseinander, d.h. seine Breite nimmt zu und seine Amplitude nimmt ab, so dass die Normierung erhalten bleibt.

## 1.2 Heisenbergsche Unschärferelation

Für die räumliche Breite  $\Delta x$  (Standardabweichung des Ortes) und die Breite  $\Delta k$  der Amplitudenverteilung des Wellenpakets gilt der Zusammenhang

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq 1, \quad (10)$$

wobei der Minimalwert von 1 für ein gaußförmiges Wellenpaket gilt. Mit  $p = \hbar k$  erhält man die **Heisenbergsche Unschärferelation**:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \quad (11)$$

Das bedeutet, dass Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden können, sondern dass beide jeweils mit einer gewissen Unschärfe behaftet sind, siehe auch Abbildung 1.2.

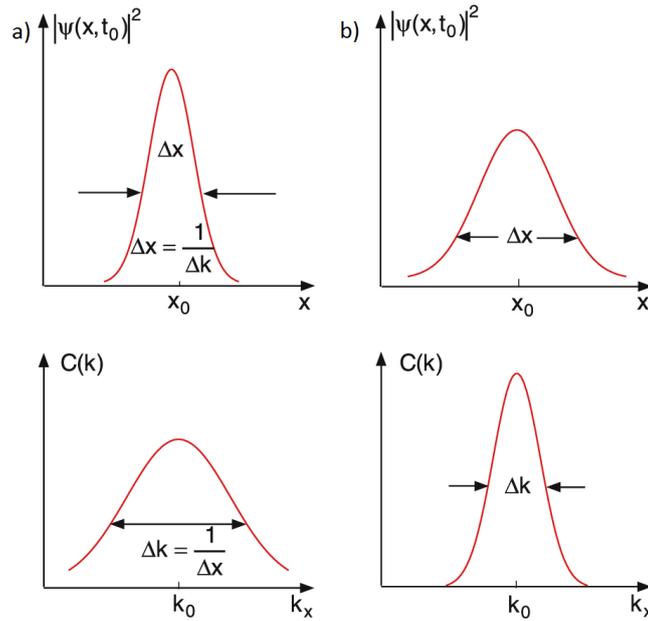


Abbildung 2: Darstellung der Unschärferelation durch die Orts- und Impulsunschärfen eines Wellenpaketes mit kleiner (a) bzw. großer (b) Ortsunschärfe.

Wegen

$$\Delta x(t) = \Delta v_{gr} t + \Delta x_0 = \frac{\hbar}{m \Delta x_0} t + \Delta x_0 \quad (12)$$

wächst die Unschärfe der Gruppengeschwindigkeit und die Lokalisierbarkeit des Teilchens nimmt ab. Dabei wird ein zu Beginn im Ortsraum sehr scharfes Wellenpaket (kleines  $\Delta x_0$ ) schneller auseinander laufen als ein weniger scharfes.

Analog zu Gleichung (11) gibt es eine Unschärfebeziehung zwischen Energie und Zeit, d.h. die Energie eines Teilchens, welches man nur während der Zeit  $\Delta t$  sieht, kann nur mit einer Unschärfe beobachtet werden:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar \quad (13)$$

## 2 Grundlegende Begriffe der Quantenmechanik

### 2.1 Zustand, Observablen, Operator, Erwartungswert

Der **Zustand** eines quantenmechanischen Systems wird mit  $|\psi\rangle$  bezeichnet und hier in der Projektion in den Ortsraum  $\langle r|\psi\rangle = \psi(\vec{r}, t)$  angegeben. Die klassische Messgröße  $M$  wird in der Quantenmechanik durch den Begriff der **Observablen** ersetzt. Jede Observable  $A$  ist durch den ihr zugeordneten **Operator**  $\hat{A}$  mit der Zustandsfunktion verknüpft.

Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen zur Zeit  $t$  im Volumen  $dV$  zu finden, ist  $|\psi(\vec{r}, t)|^2$  (sofern  $\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1$ , d.h. wenn  $\psi$  auf 1 normiert ist). Der Mittelwert, **Erwartungswert** genannt, ist für den Ort in einer Dimension

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x \cdot |\psi(\vec{r}, t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^* \cdot x \cdot \psi. \quad (14)$$

Generell gilt für den Erwartungswert  $\langle A \rangle$  einer Observablen  $A$ :

$$\langle A \rangle = \int d^3r \psi^*(\vec{r}, t) \cdot \hat{A} \cdot \psi(\vec{r}, t) \quad (15)$$

Beispiele für Operatoren im Ortsraum sind:

$$\mathbf{r} \longrightarrow \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \quad (16)$$

$$\mathbf{p} \longrightarrow \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla \quad (17)$$

$$\mathbf{L} \longrightarrow \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar(\hat{\mathbf{r}} \times \nabla) \quad (18)$$

$$E_{pot} \longrightarrow \hat{V}(\hat{\mathbf{r}}) = V(\mathbf{r}) \quad (19)$$

$$E_{kin} \longrightarrow \hat{\mathbf{p}}^2/(2m) = -\hbar^2\nabla^2/(2m) \quad (20)$$

$$E \longrightarrow \hat{H} = -\hbar^2\nabla^2/(2m) + V(\mathbf{r}) \quad (21)$$

## 2.2 Eigenfunktion und Eigenwerte

Wenn für den Operator  $\langle A \rangle$  und eine Funktion  $\psi$  gilt

$$\langle A \rangle \psi = a\psi, \quad a = const., \quad (22)$$

dann heißt  $\psi$  **Eigenfunktion** zu  $\langle A \rangle$  und  $a$  ist der **Eigenwert** von  $\langle A \rangle$  bezüglich  $\psi$ . Der Eigenwert ist gleich dem Erwartungswert von  $A$ . In diesem Fall ergibt eine Messung der Observablen  $A$  immer das gleiche Ergebnis, nämlich  $a$ .

Physikalische Größen wie Ort, Impuls, Energie oder Drehimpuls werden nur durch Operatoren mit reellen Eigenwerten beschrieben.

## 2.3 Schrödingergleichung und spezielle Lösungen

Die Bewegungsgleichung nichtrelativistischer Teilchen mit der Wellenfunktion  $\psi(x, t)$  im Potential  $V(\vec{r}, t)$  ist die **Schrödingergleichung**:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(\vec{r}, t)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (23)$$

bzw. in drei Dimensionen

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}, t) \right) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t). \quad (24)$$

Wenn das Potential zeitlich konstant, also stationär ist, lässt sich Gleichung (24) in die **stationäre Schrödingergleichung** umschreiben, wobei  $E$  die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (25)$$

Die Schrödingergleichung ist eine lineare Differentialgleichung und verschiedene Lösungen können linear überlagert werden (Superpositionsprinzip). Physikalisch sinnvolle Lösungen werden durch die Randbedingungen der jeweiligen Fragestellung bestimmt.

Beispiele spezieller Lösungen der Schrödingergleichung sind:

- **Freies Teilchen (1-dim.):**  $V(x) = 0 \Rightarrow$  Kontinuumslösung, d.h. alle Energien sind möglich
- **Potentialstufe:**  $V(x) = 0$  für  $x < 0$ ,  $V(x) = E_0$  für  $x > 0 \Rightarrow$  Reflexions- und Transmissionskoeffizient ( $T + R = 1$ ), Eindringen in den klassisch verbotenen Bereich

- **Potentialtopf:**  $V(x) = 0$  für  $0 < x < a$ ,  $V(x) = \infty$  sonst  $\Rightarrow$  quantisierte Energieeigenwerte  $E_n = \hbar^2 k_n^2 / (2m) = \hbar^2 \pi^2 n^2 / (2ma^2) = E_1 n^2$  ( $E_1$ : Nullpunktsenergie), d.h. diskrete Energieniveaus
- **Harmonischer Oszillator (1-dim.):**  $V(x) = \frac{1}{2} D x^2 \Rightarrow$  quantisierte Energieeigenwerte  $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  als Oszillatorquantenzahl ( $E_0 = \hbar \omega / 2$ : Nullpunktsenergie)

## 2.4 Quantenmechanischer Drehimpuls

Der **Drehimpulsoperator**  $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar(\mathbf{r} \times \nabla)$  lässt sich in kartesischen bzw. Kugelkoordination wie folgt darstellen:

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = i\hbar \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (26)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) = i\hbar \left( -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (27)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (28)$$

Damit ist der **Operator des Drehimpuls-Betragsquadrats**

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] = -\hbar^2 \nabla_{\vartheta, \varphi}^2. \quad (29)$$

Also ist  $\hat{\mathbf{L}}^2$  proportional zum Winkelanteil des Laplace-Operators, weshalb die **Kugelflächenfunktionen**  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  Eigenfunktionen von  $\hat{\mathbf{L}}^2$  sind.

Für ein Teilchen in einem **kugelsymmetrischen Potential**  $V(\vec{r}) = V(r)$  ist die Lösung der Schrödingergleichung das Produkt aus einem Radialanteil  $R(r)$  und einem Winkelanteil  $Y(\vartheta, \varphi) = \theta(\vartheta) \cdot \phi(\varphi)$ . Dabei ist  $\theta(\vartheta)$  die Polarlösung und  $\phi(\varphi)$  die Azimutallösung.

Die Kugelflächenfunktionen  $Y$  sind nicht nur Eigenfunktionen von  $\hat{\mathbf{L}}^2$ , sondern auch von  $\hat{L}_z$  und es gelten folgende Eigenwertgleichungen:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (30)$$

$$\hat{L}_z Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \hbar m_l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (31)$$

$l$  ist die **Bahndrehimpulszahl**,  $l \in \mathbb{N}$ , und  $m_l$  ist die **magnetische Quantenzahl**,  $-l \leq m_l \leq l$ . Da  $\hat{\mathbf{L}}^2$  und  $\hat{L}_z$  die selben Eigenfunktionen haben, sind sie gleichzeitig scharf messbar. Dagegen kann man  $\hat{L}_x$  und  $\hat{L}_y$  nicht gleichzeitig mit  $\hat{\mathbf{L}}^2$  und  $\hat{L}_z$  messen, aber ihre Werte sind eingeschränkt:

$$\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 = \hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{L}_z^2 = [l(l+1) - m_l^2] \hbar^2 \quad (32)$$

Als Konvention wählt man die  $z$ -Achse als sogenannte **Quantisierungsachse**. Wie in Abbildung 2.4 gezeigt, hat der Drehimpuls eine wohldefinierte Länge,  $\langle |L| \rangle = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$ , und Projektion auf die Quantisierungsachse,  $\langle L_z \rangle = m_l \cdot \hbar$ .

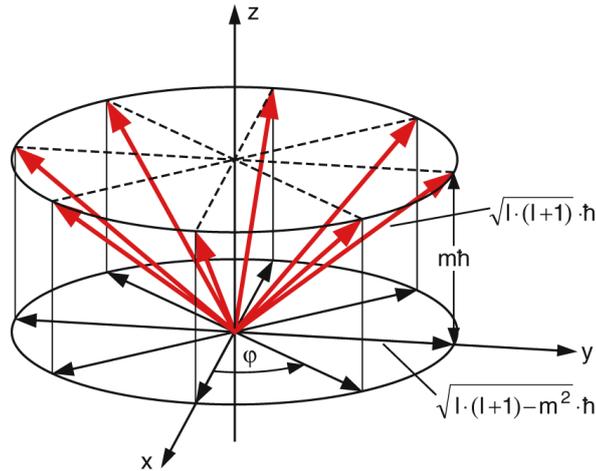


Abbildung 3: Mögliche Richtungen des Drehimpulses bei festen  $\langle |L| \rangle$  und  $\langle L_z \rangle$ .

## 2.5 Spin

Eine weitere Eigenschaft von Teilchen wurde mit dem Experiment von Otto Stern und Walter Gerlach entdeckt: Dabei wurde ein Strahl von Silberatomen in einem inhomogenen Magnetfeld abgelenkt und entgegen der Erwartung wurde eine Aufspaltung in zwei Teilstrahlen beobachtet.

Erklärt wird dies mit einem zusätzlichen Freiheitsgrad, dem **Spin**  $\hat{\mathbf{S}}$ . Dazu gibt es kein klassisches Analogon, aber man kann ihn sich als Eigendrehimpuls vorstellen, der wie jeder Drehimpuls mit einem **magnetischen Moment**  $\mu$  verknüpft ist. Daher folgt der Spin auch denselben Gesetzmäßigkeiten wie der Bahndrehimpuls und seine Eigenwerte sind

$$\langle \hat{\mathbf{S}}^2 \rangle = \hbar^2 s(s+1), \quad (33)$$

$$\langle \hat{S}_z \rangle = \hbar m_s, \quad (34)$$

mit der **Spinquantenzahl**  $s$  und der **Orientierungsquantenzahl**  $m_s$ ,  $-s \leq m_s \leq s$ .

Für Elektronen ist  $s = \frac{1}{2}$  und somit  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ , wobei Zustände mit  $m_s = +\frac{1}{2}$  als "Spin up" und solche mit  $m_s = -\frac{1}{2}$  als "Spin down" bezeichnet werden.

Da alle anderen Eigenschaften eines Zustands erhalten bleiben, kann der Spin separat betrachtet werden und die Zustandsfunktion lässt sich als Produkt der Spinwellenfunktion  $\chi(\mathbf{s})$  und der Ortswellenfunktion  $\psi(\mathbf{r}, t)$  schreiben:

$$\psi_s(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) \cdot \chi(\mathbf{s}) \quad (35)$$

## 3 Fermionen und Bosonen

Jedem Quantenteilchen lässt sich ein Spin zuordnen, wodurch sie sich in zwei Arten aufteilen lassen: **Fermionen** (halbzahliger Spin) und **Bosonen** (ganzzahliger Spin).

Fermionen und Bosonen verhalten sich beispielsweise bei Streuexperimenten unterschiedlich. Betrachtet man zwei identische und damit ununterscheidbare Teilchen, sind sämtliche Observablen und damit das Betragsquadrat der Wellenfunktion invariant unter Austausch der beiden Teilchen,

$$|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = |\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)|^2 \quad (36)$$

Daraus folgt für die Wellenfunktion im Fall von Bosonen bzw. Fermionen:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = +\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \quad (37)$$

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \quad (38)$$

Allgemein ist die Wellenfunktion für Bosonen also **symmetrisch** unter Austausch zweier Teilchen und **antisymmetrisch** für Fermionen.

Für Fermionen bedeutet dies, dass die Wahrscheinlichkeit, zwei Fermionen im **selben** Zustand (d.h. am selben Ort mit identischer Hauptquantenzahl, Drehimpulsquantenzahl, Spinquantenzahl, etc.) zu finden, gleich Null ist (**Pauli-Prinzip**).

Beispiele für Fermionen sind Elektronen, Protonen, Neutronen oder Quarks; Beispiele für Bosonen sind Photonen, Phononen oder  $\alpha$ -Teilchen.

## 4 Streuung

### 4.1 Grundbegriffe

Mit Streuexperimenten können die Struktur von Teilchen, die Ladungsverteilung in Atomen oder z.B. der Wechselwirkungsquerschnitt zwischen Atomen untersucht werden.

Wenn ein Strahl von Teilchen  $A$  mit der Teilchenflussdichte  $\dot{N}_A = dN_A/dt$  auf ein dünnes Target der Dicke  $dx$ , bestehend aus Teilchen  $B$  mit der Dichte  $n_B$ , trifft, dann wird ein Teil  $d\dot{N}_s$  der einfallenden Teilchen  $A$  durch Wechselwirkung mit Teilchen  $B$  gestreut.

Nimmt man nur Einfachstreuung an, wird die Fläche  $\sigma = \pi r^2$  um ein Targetteilchen, in der ein vorbeifliegendes Teilchen  $A$  messbar gestreut wird, als der **integrale** (totale) **Wirkungsquerschnitt** definiert. Allgemein lässt sich  $\sigma$  schreiben als

$$\sigma = \frac{\text{Zahl der gestreuten Teilchen pro Zeiteinheit}}{\text{Zahl der einfallenden Teilchen pro Zeiteinheit und Fläche}} = \frac{d\dot{N}_s}{\dot{N}_A/F}, \quad (39)$$

mit der bestrahlten Targetfläche  $F = N_B/(n_B \cdot dx)$ ;  $N_B$  ist dabei die Anzahl der Streuzentren im Streuvolumen  $Fdx$ . Der integrale Wirkungsquerschnitt hat die Einheit einer Fläche und wird oft in Barn angegeben,  $1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$ . Er hängt mit der mittleren freien Weglänge über die Teilchendichte zusammen,  $\lambda = 1/(n\sigma)$ .

Die Änderung des Teilchenflusses  $d\dot{N}_A$  entlang der Strecke  $dx$  im Target ergibt sich zu

$$d\dot{N}_A = -d\dot{N}_s = -\frac{\dot{N}_A \sigma}{F} N_B = -\dot{N}_A \sigma n_B dx. \quad (40)$$

Ergänzend wird der **differentielle Wirkungsquerschnitt**  $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_\theta$  folgendermaßen definiert:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Zahl der gestreuten Teilchen pro Zeiteinheit und Raumwinkel}}{\text{Zahl der einfallenden Teilchen pro Zeiteinheit und Fläche}} = \frac{d\dot{N}_s/\Delta\Omega}{\dot{N}_A/F} \quad (41)$$

Die Zahl  $\Delta\dot{N}_s$  der entlang  $dx$  im Target pro Zeiteinheit in den Raumwinkel  $\Delta\Omega$  um den Winkel  $\theta$  gestreuten Teilchen ist

$$\Delta\dot{N}_s = \frac{\dot{N}_A}{F} N_B \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega = \dot{N}_A n_B dx \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega. \quad (42)$$

Mit dem **Stoßparameter**  $b = b(\theta)$  und dem Raumwinkel  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  lässt sich eine weitere Gleichung für den differentiellen Wirkungsquerschnitt herleiten:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = b \left| \frac{db}{d\theta} \right| \frac{1}{\sin\theta} \quad (43)$$

Der Anteil der Teilchen, der bei einem Streuexperiment in einen Detektor gelangt, dessen Fläche den Raumwinkel  $d\Omega$  abdeckt, ist

$$\frac{d\dot{N}_s}{\dot{N}_A} = n_B dx \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta \sin\theta d\theta d\phi = \frac{N_B}{F} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta d\Omega. \quad (44)$$

Anders als der integrale Wirkungsquerschnitt, welcher Auskunft über die Ausdehnung des Streuzentrums gibt, enthält der differentielle Wirkungsquerschnitt Informationen über das Wechselwirkungspotential  $V(r)$  zwischen den Teilchen  $A$  und  $B$  im Abstand  $r$ . Von diesem kann dann auf die Struktur der Streuzentren, d.h. der Atome, geschlossen werden.

In Abbildung 4.1 sind die Streuung eines Teilchens  $A$  im Potential  $V(r)$  und die dazugehörigen Größen wie Stoßparameter  $b$ , Ablenkwinkel  $\theta$ , Raumwinkel  $d\Omega$  und Detektorfläche  $A_D$  dargestellt.

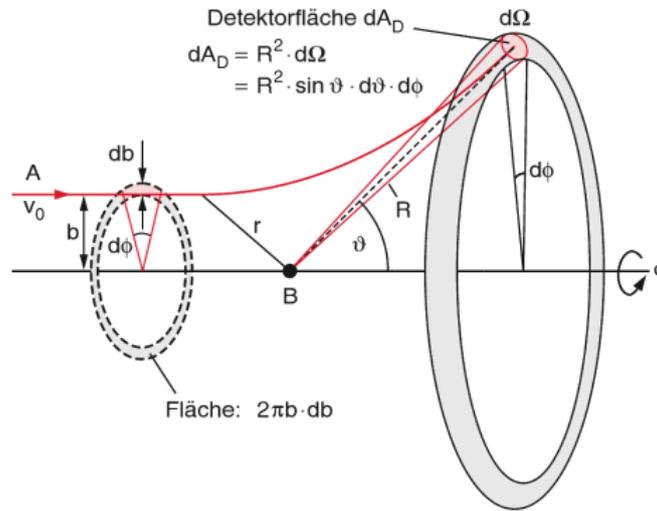


Abbildung 4: Streuung eines Teilchens  $A$  im Potential  $V(r)$  mit Mittelpunkt in  $B$ .

Eine wichtige Größe für Streuexperimente ist die **Luminosität**  $L$ . Sie ist definiert als das Produkt aus Teilchenstromdichte  $j_A$  und der Anzahl der im Strahl stehenden Streuzentren  $N_B$ , wobei  $v_A$  die Strahlgeschwindigkeit ist:

$$L = j_A \cdot N_B = \left(\frac{N_A}{V} v_A\right) \cdot (n_B dx F) = n_A \cdot v_A \cdot n_B \cdot dx \cdot F \quad (45)$$

Damit ist die Anzahl der pro Zeiteinheit in das Raumwinkelelement  $d\Omega$  gestreuten Teilchen:

$$d\dot{N}_s = L \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot d\Omega = L \cdot \sigma \quad (46)$$

## 4.2 Rutherford-Streuung

Die Rutherfordsche Streuformel beruht auf der Betrachtung des Streuprozesses als Stoß zweier Teilchen im Schwerpunktsystem, wie es in der klassischen Streutheorie (siehe oben) eingeführt wird.

Für ein kugelsymmetrisches Potential  $V(r) = k/r$  lässt sich damit eine Gleichung für den Stoßparameter herleiten,

$$b(\theta) = \frac{k}{\mu v^2} \cot \frac{\theta}{2}, \quad (47)$$

mit der reduzierten Masse  $\mu$ , der Geschwindigkeit  $v$  des Schwerpunktsystems und dem Streuwinkel  $\theta$ .

Handelt es sich um das Potential eines punktförmigen geladenen Kerns, ist  $k = \frac{Z_A Z_B e^2}{4\pi\epsilon_0}$  und es ergibt sich durch Differentiation von Gleichung (47)

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{Z_A Z_B e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu v^2} \frac{1}{\sin^2 \theta/2}, \quad (48)$$

und zusammen mit Gleichung (47) erhält man die **Rutherfordsche Streuformel**:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{Z_A Z_B e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \quad (49)$$

Der Bruchteil der einfallenden Teilchen, der zum Detektor der Fläche  $A_D = d\Omega \cdot R^2$  gelangt, ist

$$\frac{d\dot{N}_s}{\dot{N}_A} = \frac{1}{2} \frac{n_B dx}{R^2} \left( \frac{Z_A Z_B e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu v^2} \right)^2 \frac{A_D}{\sin^4 \theta/2} \quad (50)$$

## Literatur

- Vorlesungsskript zur Experimentalphysik 4 im Sommersemester 2013 von Prof. L. Fabbiotti
- Experimentalphysik 3 von W. Demtröder

Sämtliche Bilder sind ebenfalls dem Buch "Experimentalphysik 3" von W. Demtröder entnommen.