Aufgabe 1 (6 Pkt.)

Vier positive Punktladungen im Vakuum gleicher Größe Q sitzen in der Ebenze $z = 0$ eines kartesischen Koordinatensystems auf den Ecken eines Quadrats, nämlich in den Punkten $\mathbf{a}_x = a \cdot \mathbf{e}_x$, $-\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y = a \cdot \mathbf{e}_y$, $-\mathbf{a}_y$.

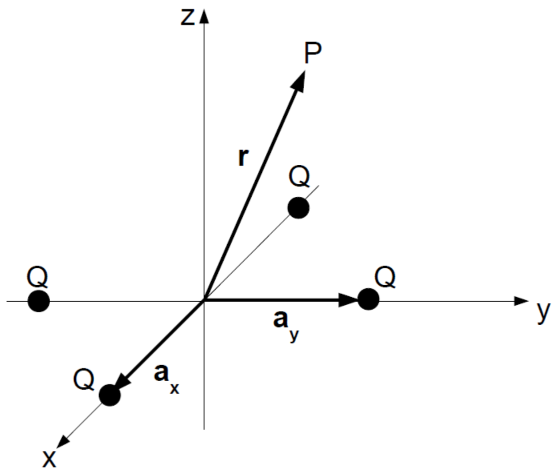

Abbildung 1: Zu Aufgabe 1

(a) Geben Sie das Potential der Ladungsverteilung im Punkt P mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ an.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Ladungsverteilung für große Abstände wie eine Punktladung verhält.

(c) Wie groß muss eine Ladung q als Kompensation im Ursprung des Koordinatensystem relativ zu Q sein, damit die Kräfte auf die Ladung Q verschwinden?

(d) Bestimmen Sie das Potential auf der z-Achse als Funktion von z.

Lösung zu Aufgabe 1

(a)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}_x|} + \frac{1}{|\mathbf{r}+\mathbf{a}_x|} + \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}_y|} + \frac{1}{|\mathbf{r}+\mathbf{a}_<|}\right)$$

[1]

(b) Für große Abstände $r >> a$ lässt sich schreiben

$$|\mathbf{r} \pm \mathbf{a}_y| \approx |\mathbf{r}|$$

eingesetzt in das Potential aus (a)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{4Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

[1]

(c)

$$\mathbf{F} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\mathbf{e}_x}{(2a)^2} + \frac{1}{(\sqrt{2}a)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)\right)\right] + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{e}_x}{a^2}$$

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{e}_x}{a^2}\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)Q + q\right] = 0$$

Daraus folgt für die Ladung am Ursprung

$$q = -Q\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -0.957Q$$

[3]

(d) Mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe (a) ergibt sich für das Potential auf der z-Achse

$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{4}{\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{Q}{\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$$

[1]

Aufgabe 2 (5 Pkt.)

An den quadratischen Platten (Seitenlänge $l = 10$ cm, Plattenabstand $d = 1$ mm) eines zunächst leeren Plattenkondensators liegt eine Spannung von $U_0 = 20$ V an. Der Kondensator wird nun von der Spannungsquelle abgeklemmt.

(a) Berechnen Sie die Kapazität C_0 des Plattenkondensators (Herleitung via Satz von Gauß).

(b) Berechnen Sie die Ladungsmenge Q_0 auf den Platten.

(c) Jetzt werden zwei Dielektrika ($\epsilon_1 = 7$, $\epsilon_2 = 3$) in den Kondensator geschoben, die jeweils die Hälfte des Volumens ausfüllen. Berechnen Sie die Kapazität und die Spannung.

Lösung zu Aufgabe 2

(a) Für die Herleitung betrachte wie üblich

$$C_0 = \frac{Q}{U}$$

mit

$$U = \int E \cdot \mathrm{d}x$$

ergibt schließlich

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 88.54 \text{ pF}$$

[2]

(b)

$$Q_0 = C_0 \cdot U_0 = 1.77 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

[1]

(c) Es handelt sich um die Reihenschaltung zweier Kondensatoren, für deren Gesamtkapazität gilt

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

oder

$$C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

Für die Kapazität des Kondensators mit Dielektrikum gilt

$$C_i = \epsilon_i \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d/2} = 2\epsilon_i \cdot C_0$$

Eingesetzt in die Gleichung für die Gesamtkapazität erhält man somit

$$C_{ges} = \frac{4\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot C_0^2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) 2C_0} = \frac{2\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} C_0 = 0.37 \text{ nF}$$

Damit erhält man für die Spannung

$$U = \frac{Q_0}{C_{ges}} = 4.78 \text{ V}$$

[2]

Aufgabe 3 (4 Pkt.)

Betrachten Sie zwei planparallele Platten der Fläche A im Vakuum. Die Platten seien genau senkrecht zur Erdbeschleunigung $\mathbf{g}$ positioniert. Zwischen den Platten werde nun ein punktförmiges Öltröpfchen mit der Masse m und der Ladung q gebracht (q sei positiv). Für welche Ladung Q auf den Platten schwebt das Öltröpfchen kräftefrei im Schwerefeld der Erde?

Lösung zu Aufgabe 3

Gravitationskraft und Coulomb-Kraft müssen sich aufheben, also

$$F_G = m \cdot g$$

gleichgesetzt mit

$$F_{el} = q \cdot E = q \cdot \frac{U}{d} = q \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{Q}{C} = q \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{Q}{\frac{\epsilon_0 A}{d}} = q \cdot \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Für die Ladung Q erhält man demnach

$$Q = \frac{m \cdot g \cdot \epsilon_0 A}{q}$$

Aufgabe 4 (6 Pkt.)

Gegeben ist eine rechteckige Stromschleife mit den Abmessungen $a = 11$ cm und $b = 14$ cm. Der Winkel Θ zwischen Schleife und y-Achse beträgt $30°$ und es fließt ein Strom $I = 1$ A durch die Schleife.

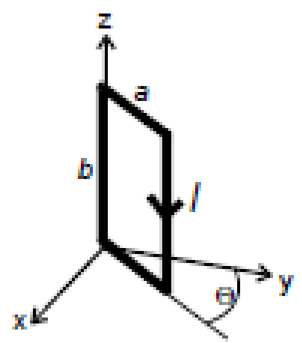

Abbildung 2: Abbildung zu Aufgabe .

(a) Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment $\mathbf{p}_m$ der Stromschleife (Betrag und Richtung).

(b) Wie groß ist die potentielle Energie der Schleife in einem Magnetfeld $B = 1$ T, wenn $\mathbf{B}$ entlang der x-Achse angelegt wird? Wie groß ist das Drehmoment auf die Schleife und in welche Richtung wirkt es?

Lösung zu Aufgabe 4

(a) Für das Dipolmoment gilt

$$|\mathbf{p}_m| = I \cdot A = 1\ \mathrm{A} \cdot 0.11 \cdot 0.14\ \mathrm{m}^2 = 1.54 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{Am}^2$$

Die Richtung des Dipolmoments liegt parallel zur Orientierung der Fläche der Leiterschleife, also

$$p_z = 0$$
$$p_y = +|\mathbf{p}_m| \cdot \sin\Theta p_x = -|\mathbf{p}_m| \cdot \cos\Theta$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\mathbf{p}_m = 1.54 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{Am}^2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Die potentielle Energie in einem Magnetfeld ist unter Berücksichtigung von $\mathbf{B} = B \cdot \mathbf{e}_x$:

$$E_{pot} = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B} = 1.54 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{Am}^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = 1.33 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J}$$

Das Drehmoment wird über das Kreuzprodukt von Dipolmoment und Magnetfeld bestimmt:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B} = 1.54 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{Am}^2\mathrm{T} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (4 Pkt.)

In einem leitenden Medium wird die Ausbreitung des E-Feldes einer elektromagnetischen Welle durch die verallgemeinerte Wellengleichung beschrieben. Leiten sie diese aus den Maxwell-Gleichungen unter Berücksichtigung des Maxwell'schen Verschiebestroms $j = \sigma E$ her.

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\ddot{E} = \sigma\mu_0\dot{E} \tag{1}$$

Hinweis: Für jedes Vektor-Feld $\vec{f}$ gilt $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = -\Delta\vec{f} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{f})$
Bedenken Sie, dass die Ladungsdichte ρ im inneren eines Leiters Null beträgt.

Lösung zu Aufgabe 5

Die Maxwell-Gleichungen lauten:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{4}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{E}} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{5}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{7}$$

Nun sollen gelten $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Dann ergibt Rotationsbildung der dritten Gleichung unter Verwendung der zweiten Gleichung:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \dot{\mathbf{B}} = -(\nabla \times \mathbf{B})^{\dot{}} = -(\mu_0\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{E}})^{\dot{}} = -\mu_0\sigma\dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{E}} \tag{8}$$

Mit der Identität

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) \tag{9}$$

folgt daraus

$$-\Delta\mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\mu_0\sigma\dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{E}} \tag{10}$$

und da wegen $\rho = 0$ die Divergenz von $\mathbf{E}$ verschwindet, ergibt sich

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{E}} = \mu_0\sigma\dot{\mathbf{E}} \tag{11}$$

Aufgabe 6 (5 Pkt.)

Eine ebene elektromagnetische Welle mit der Frequenz ω bewege sich in der z-Richtung mit der Geschwindigkeit v. Sie ist so zirkular polarisiert, dass das E-Feld zur Zeit $t = 0$ in y-Richtung steht und zur Zeit $t = \frac{\pi}{\omega}$ in x-Richtung.

(a) Geben Sie den Wellenvektor $\vec{k}$ an.

(b) Geben Sie die Gleichung für $\vec{E}(x, y, z, t)$ dieser Welle an.

(c) Wie lautet das B-Feld, $\vec{B}(x, y, z, t)$ dieser Welle?

(d) Berechnen Sie den Poynting-Vektor dieser ebenen Welle.

Lösung zu Aufgabe 6

(a) $k_x = 0, k_y = 0, k_z = \frac{\omega}{v}$ da für die Kreisfrequenz $\omega = \frac{v}{k}$ gilt

(b) Es gilt:

$$E_x = E_0 sin(\omega t - k_z z) \tag{2}$$
$$E_y = E_0 cos(\omega t - k_z z) \tag{3}$$
$$E_z = 0 \tag{4}$$

(c) Hier erhält man aus $\vec{B} = (\frac{1}{v})\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}$

$$B_x = -\frac{E_0}{v} cos(\omega t - k_z z) = \frac{E_y}{v} \tag{5}$$
$$B_y = -\frac{E_0}{v} sin(\omega t - k_z z) = \frac{E_x}{v} \tag{6}$$
$$B_z = 0 \tag{7}$$

(d) Aus $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ erhält man

$$S_{x,y} = 0 \tag{8}$$
$$S_z = \frac{1}{v\mu_0}(E_x E_y - E_y E_x) = \frac{E_0^2}{\mu_0 v} \tag{9}$$

durch $cos^2 + sin^2 = 1$

Aufgabe 7 (10 Pkt.)

Die NASA hat die erste Raumfähre entwickelt, die relativistische Geschwindigkeiten erreichen kann. Sie ist 12 Meter breit, 30 Meter lang und 40 Tonnen schwer. Sie startet von der Erde aus zu einem Testflug, bei dem sie konstant ihre Höchstgeschwindigkeit v fliegt. Die Raumfahrtbehörde von San Marino möchte die Geschwindigkeit messen und setzt dazu eine Stunde nach dem Start ein Signal zur Radarpeilung ab. In dem Moment in dem das Peilsignal die Fähre trifft, schaut der Pilot auf seine Rolex. Die Reflexion des Signals wird zwei Stunden Später in San Marino empfangen.

(a) Wie groß ist die Ruheenergie der Raumfähre?

(b) Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm des Eigensystems der Erde.

(c) Zeichnen Sie die Weltlinie der Radarpeilung vor und nach ihrer Reflexion an der Hülle der Fähre ein und berechnen sie die Geschwindigkeit der Fähre.
Kontrollergebnis: $[v = \frac{c}{2}]$

(d) Zeichnen Sie Eigensystem der Raumfähre ein und bestimmen Sie seinen Winkel zur Zeitachse des Erdsystems.

(e) Welche Uhrzeit sieht der Pilot, wenn er um Mitternacht gestartet ist?

(f) Vor dem Start brachte der Pilot 80kg auf die Waage. Während dem Flug stellt er sich auf eine Körperwaage, die aus unerfindlichen Gründen auf der Brücke rumsteht. Welches Gewicht zeigt sie an?

(g) Ein Eskimo sieht kurz nach dem Start in den Himmel und erblickt die weg fliegende Fähre. Mit seinen guten Augen (es gibt keine kurzsichtigen Eskimos) kann er die Länge und Breite der Fähre bestimmen. Welche Maße schreibt er der Fähre zu?

(h) Wie groß ist die Kinetische Energie der Raumfähre?

San Marino hat inzwischen nachgerüstet und ein noch schnelleres Raumschiff entwickelt. Es erreicht eine Geschwindigkeit von $\frac{3}{5}c$ und überholt irgendwann die NASA-Fähre.

(i) Welche Geschwindigkeit beobachtet der NASA-Pilot?

Lösung zu Aufgabe 7

(a)

$$E_0 = m_0 c^2 = 40000 kg \cdot c^2 = 3,58 \cdot 10^{21} J \tag{10}$$

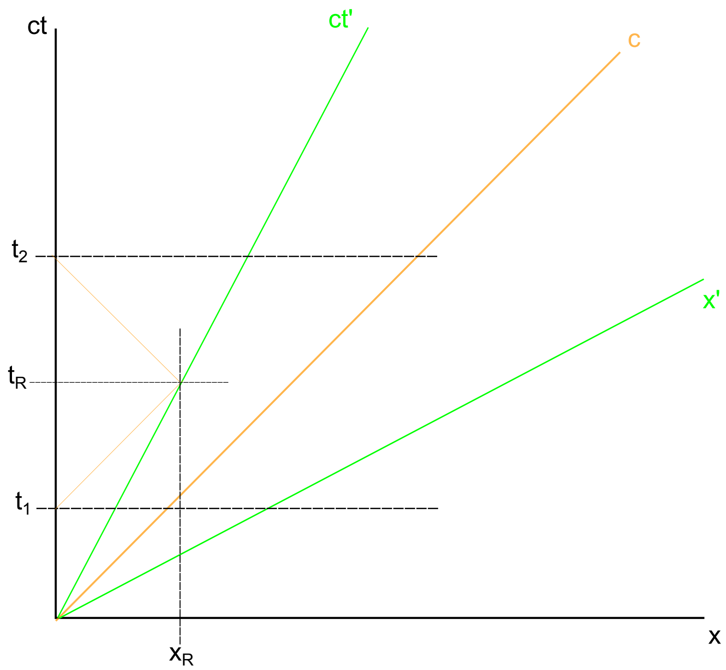

Abbildung 3: Minkowski Diagramm des Eigensystems der Erde

(b)

(c) Die Geschwindigkeit kann einfach als Quotient von Raum- und Zeitkoordinate der Reflexion R ermittelt werden (Steigungsdreieck)

$$v = \frac{x_R}{t_R} \tag{11}$$

Es gilt

$$x_R = \frac{1}{2}(t_2 - t_1) = 1Lh \qquad t_R = \frac{t_2 - t_1}{2} = 2h \tag{12}$$

$$\Rightarrow v = \frac{x_R}{t_R} = \frac{1}{2}c \tag{13}$$

(d) Für den Winkel gilt

$$tan(\alpha) = \beta \qquad \Rightarrow \alpha = 26,56^\circ \tag{14}$$

(e) Im Erdsystem sind 2 Stunden vergangen. Mit der Zeitdilatation folgt

$$2h = \Delta t = \gamma \Delta t_0 \qquad \Rightarrow \Delta t_0 = \frac{2h}{\gamma} = 1,73h \tag{15}$$

mit $\gamma = 1,15$ Wenn seine Uhr beim Start 0 Uhr gezeigt hat dann zeigt sie ihm beim Ablesen $1:44$ Uhr

(f) Sie zeigt ihm sein Ruhegewicht von 80kg

g Der Eskimo misst die Länge der Rakete zu L. durch die Längenkontraktion gilt

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{30m}{1,15} = 26m \tag{16}$$

Da der Raum nur in Bewegungsrichtung kontrahiert wird, sieht er die Breite 12 Meter.

(h) Die Formel für die Kinetische Energie

$$E_{kin} = m(v)c^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1) = 3,58 \cdot 10^{21} J(1,15 - 1) = 5,5 \cdot 10^{20} J \tag{17}$$

(i) Man betrachtet die NASA-Fähre als in Ruhe dann ergibt sich für die Geschwindigkeitsaddition

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{2}{7}c \tag{18}$$