# Ferienkurs der Experimentalphysik II Musterlösung Übung 4

Michael Mittermair

29. August 2013

# Aufgabe 1

Ein Elektron hat die Ruhemasse $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$kg.
a) Berechnen Sie die Ruheenergie in Elektronenvolt
b) Welche Spannung muss ein Elektron durchlaufen, damit sich seine Masse verdoppelt?
c) Welche Geschwindigkeit hat ein Elektron dessen Masse seiner doppelten Ruhemasse entspricht?

# Lösung Aufgabe 1

a)

$$e - 0 = m_0 c^2 = 511 \cdot 10^3 eV \tag{1}$$

b)

$$m = 2m_0 \qquad \Rightarrow \qquad E = 2E_0 \qquad \Rightarrow \qquad E_{kin} = E_0 = eU \tag{2}$$

$$U = 511kV \tag{3}$$

c)

$$2m_0 = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

Nach v auflösen

$$\Rightarrow v = 0,87c \tag{5}$$

# Aufgabe 2

Zum Zeitpunkt $t = 0$ startet von er Erde(Bezugssystem S, Ursprung) ein Raumschiff mit der Geschwindigkeit $v = \frac{3}{5}c$. Die Erde funkt zum Zeitpunkt $\tau = 1d$ eine Nachricht an das Schiff.

a) Zeigen Sie: Wenn der Funkspruch empfangen wird, hat das Raumschiff im System S den Ort $x = \frac{v\tau}{1-\beta}$ und es ist die Zeit $t = \frac{\tau}{1-\beta}$ auf der Erde vergangen.

b) Bestimmen sie die Ankunftszeit des Funkspruchs, die von einer Uhr an Board des Schiffs gemessen wird.

# Lösung Aufgabe 2

a) Dies kann man einfach mit der Bewegung lösen: Im System $S$ hat das Raumschiff den Ort

$$x = vt.$$

Damit der Funkspruch auf den Empfänger trifft, muss gelten, dass

$$x = ct - c\tau.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke gleich und löst nach $t$ auf erhält man

$$\underline{\underline{t = \frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{5}{2}\ \mathrm{d}}}$$

bzw. mit der ersten Gleichung

$$\underline{\underline{x = \frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}} = 3888 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m}.}}$$

b) Die Ankunftszeit $t'$ ist gemäß der Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ &= \gamma\left(\frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} - \frac{v^2\tau}{c^2\left(1 - \frac{v}{c}\right)}\right) \\ &= \gamma\tau\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c}} \\ &= \gamma\tau\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{5}{4}\frac{8}{5}\tau = \underline{\underline{2\tau = 2\ \mathrm{d}}}. \end{aligned}$$

# Aufgabe 3

Die Erde, eine bemannte Rakete und ein Meteor bewegen sich zufällig in die gleiche Richtung. An der Erde fliegt die Rakete mit einer Geschwindigkeit $v_{E,R} = \frac{3}{4}c$, betrachtet im Eigensystem der Erde vorbei. Die Rakete wird von dem Meteor mit einer Relativgeschwindigkeit von $v_{R,M} = \frac{1}{2}c$ überholt.

a) Welche Geschwindigkeit hat der Meteor für einen Betrachter auf der Erde?

b) Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm für die se Situation aus Sicht der Raketenbesatzung.

# Lösung Aufgabe 3

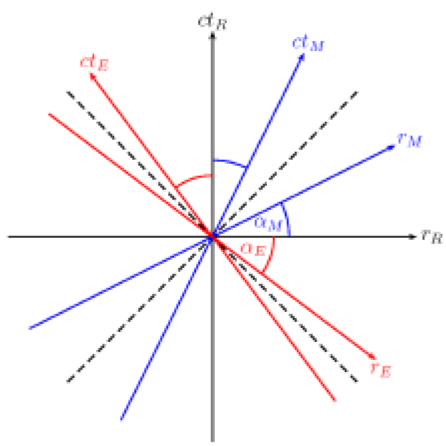
a) Die Geschwindigkeiten $v_{\mathrm{E,R}}$ und $v_{\mathrm{R,M}}$ müssen (relativistisch) addiert werden, da die jeweiligen Beobachter positive Geschwindigkeiten sehen, also

$$v_{\mathrm{E,M}} = \frac{v_{\mathrm{E,R}} + v_{\mathrm{R,M}}}{1 + \frac{v_{\mathrm{E,R}} v_{\mathrm{R,M}}}{c^2}} = \underline{\underline{\frac{10}{11}}} c.$$

b) Die Winkel im Minkowski-Diagramm ergeben sich zu

$$\alpha_M = \arctan\left(\frac{v_{\mathrm{M}}}{c}\right) \approx 26.6^\circ \text{ und } \alpha_E = \arctan\left(\frac{v_{\mathrm{E}}}{c}\right) \approx 36.9^\circ.$$

Da $v$ für den Meteor positiv und für die Erde negativ ist, bewegen sich die Achsen auf die Winkelhalbierende zu, bzw. von ihr weg.




# Aufgabe 4

Betrachten Sie zwei Ereignisse$E_1$, $E_2$ im Koordinatensystem S. $E_1$ finde vor $E_2$ statt. Es sei außerdem ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_2 > x_1$ Zeigen Sie:

a) Es gibt eine Lorentztransformation, die die beiden Ereignisse auf den gleichen Ort transformiert genau dann, wenn für die Koordinaten $c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 > 0$. Wie nennt man ein derartig getrenntes Ereignispaar?

b)Es gibt eine Lorentztransformation, die die beiden Ereignisse auf die gleiche Zeit transformiert genau dann, wenn für die Koordinaten $c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 < 0$. Wie nennt man ein derartig getrenntes Ereignispaar?

c) Die zeitliche Reihenfolge zweier zeitartig getrennter Ereignisse hängt nicht vom Bezugssystem ab.

d) Man betrachte zwei gleichzeitige Ereignisse, von denen das eine $E_1$ auf der Erde und das andere $E_2$ im Zentrum der Milchstraße($30000ly$) stattfindet. Mit welcher Geschwindigkeit muss man sich bewegen, damit $E_2$ eine Stunde später als $E_1$ stattfindet. Mit welcher, damit es eine Stunde früher stattfindet?

# Lösung Aufgabe 4

a) Lorentz-Trafo der Ortskoordinaten:

$$x_1' = \gamma(x_1 - vt_1) \qquad\qquad x_2' = \gamma(x_2 - vt_2) \tag{6}$$

Gleichsetzen ergibt eine Bedingung für v:

$$\gamma(x_1 - vt_1) = \gamma(x_2 - vt_2) \tag{7}$$

Auflösen nach v

$$\Rightarrow v^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{(t_1 - t_2)^2} \tag{8}$$

Mit der allgemeingültigen Relation $v^2 < c^2$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{(t_1 - t_2)^2} < c^2 \tag{9}$$

Durch Umformung erhält man

$$c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 > 0 \tag{10}$$

Man bezeichnet die Ereignisse als zeitartig getrennt.

b) Lorentz-Trafo der Zeitkoordinaten

$$t_1' = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1) \qquad\qquad t_2' = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) \tag{11}$$

Gleichsetzen der t'
$$\gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1) = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) \tag{12}$$
Umformung nach $v^2$
$$\Rightarrow v^2 = c^4 \frac{(t_1 - t_2)^2}{(x_1 - x_2)^2} \tag{13}$$
Wieder verwenden wir dass $v^2 < c^2$ sein muss
$$v^2 = c^4 \frac{(t_1 - t_2)^2}{(x_1 - x_2)^2} < c^2 \tag{14}$$
Damit folgt
$$c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 < 0 \tag{15}$$
Man bezeichnet die Ereignisse als raumartig getrennt.

# Aufgabe 5

Zwei Raumschiffe $R_1$ und $R_2$ starten zur Erdzeit $t = 0$ für eine Forschungsmission in Richtung des Sternbilds des Schwans. Mit der Erdstation sei das System S, mit Raumschiff $R_1$ S' und mit Raumschiff $R_2$ S" fest verknüpft. Bezogen auf die Erdstation hat Raumschiff $R_1$ die Geschwindigkeit $0,6$c und Raumschiff $R_2$ $0,8$c. Beim Start werden die Borduhren mit der der Basisstation auf der Erde synchronisiert.

a) Zeichnen sie ein Minkowski-Diagramm für das System S und tragen sie die Weltlinien der Raumschiffe ein.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Raumschiffs $R_2$ im System des Raumschiffs $R_1$

Zum Zeitpunkt $t_1 = 1h$ wird zur Kontrolle an die Raumschiffe ein Funkspruch gesandt. Der Funkspruch wird von Raumschiff $R_2$ zum Zeitpunkt $t_2''$(Ereignis P) sofort beantwortet und zur Erdstation zurückgesandt. Dort trifft er zum Zeitpunkt $t_3$ ein.

Tragen Sie das Ereignis P in das Minkowskidiagramm ein. Berechnen sie die Zeit $t_3$

Nach $t'_P = 10$ Stunden Flugzeit registriert das Raumschiff $R_1$ (Ereignis Q) gleichzeitig zwei Sternenexplosionen $E_1(T'_Q, x'_{E1})$ und $E_2(T'_Q, x'_{E2})$. Der räumliche Abstand $|x'_{E1} - x'_{E2}|$ der beiden Explosionen wird zu $\frac{8}{5}$ Lichtstunden bestimmt. Die beiden Explosionen liegen symmetrisch zur halben bis $t'_Q$ von $R_1$ zurückgelegten Flugstrecke. Das Raumschiff meldet das Ereignis Q per Funkspruch an Raumschiff $R_2$ und die Erdstation. Auf der Erde trifft die Nachricht zum Zeitpunkt $t_4$ und bei $R_2$ zum Zeitpunkt $T''_4$ ein.

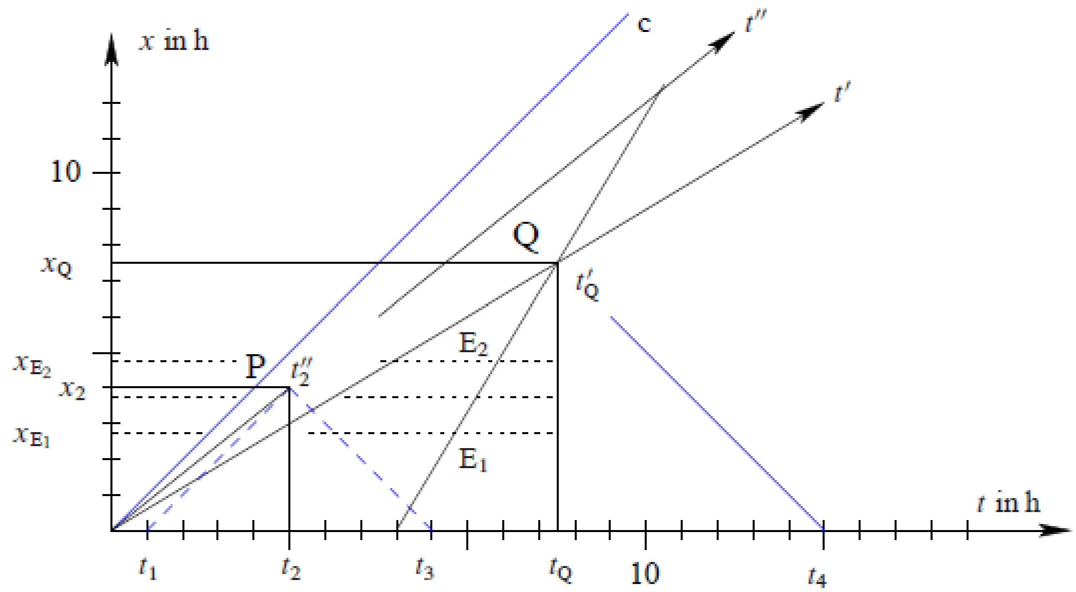
d) Tragen sie das Ereignis Q in das Minkowski-Diagramm ein. Berechnen Sie die Zeitpunkte $t_4$ und $t'_4$.

e) Berechnen Sie die räumlichen Koordinaten $x_{E1}$ und $x_{E2}$ der Ereignisse $E_1$ und $E_2$ im System S. Tragen Sie die Ereignisse $E_1$ und $E_2$ in das Diagramm ein. Erläutern Sie kurz, welche Bedeutung die Linie hat, auf der die Ereignisse Q, $E_1$ und $E_2$ liegen.

# Lösung Aufgabe 5

a)

$$\beta = \frac{v}{c} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 & = \frac{3}{5} \\ \beta_2 & = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 & = \frac{5}{4} \\ \gamma_2 & = \frac{5}{3} \end{cases} \tag{16}$$




b) $v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}$ ist die Geschwindigkeit des Raumschiffs $R_2$ im Erdsystem. Mit der Formel für Geschwindigkeitsaddition folgt für das gestrichene System:

$$v'_2 = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{0,8 - 0,6}{1 - 0,8 \cdot 0,6} c = \frac{5}{13} c \tag{17}$$

c) Dem Minkowski-Diagramm entnimmt man einen linearen Zusammenhang zwischen t und t'

$$\left.\begin{array}{l} t''_2 = kt_1 \\ t3 = kt'' \end{array}\right\} \Rightarrow t_3 = k \cdot k \cdot t_1 = k^2 t_1 \tag{18}$$

Es gilt mit $x_2 = c(t_2 - t_1)$

$$x_2 = c(\frac{t_3}{2} + \frac{t_1}{2} - \frac{t_1}{2}) = \frac{c}{2}(t_3 - t_1) \tag{19}$$

und

$$v_2 = \frac{x_2}{t_2} = \frac{\frac{c}{2(t_3 - t_1)}}{\frac{1}{2}(t_3 + t_1)} = \frac{c}{2}(t_3 - t_1) \tag{20}$$

Einsetzen von $t_3 = k^2 t_1$ ergibt

$$v_2 = c\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \Rightarrow k^2 v_2 + v_2 = ck^2 - c \Rightarrow k^2(c - v_2) = c + v_2 \tag{21}$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{c+v_2}{c-v_2} \tag{22}$$

mit $v_2 = \frac{4}{5}c$ und $t_1 = 1h$ folgt

$$t_3 = k^2 t_1 = \frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} t_1 = 9t_1 \Rightarrow t_3 = 9h \tag{23}$$

d) Zum Zeitpunkt $t'_P = 10h$ wird ein Lichtsignal nach $R_2$ und zur Erde zurück geschickt. Mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe c folgt analog

$$\kappa^2 = \frac{v_1 + c}{c - v_1} = \frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = 4 \tag{24}$$

und somit

$$t_4 = \kappa t'_P = 2 \cdot 10h \Rightarrow t_4 = 20h \tag{25}$$

Das System S” bewegt sich nach Teilaufgabe 1b mit der Geschwindigkeit $v'_2 = \frac{5}{13}c$ gegenüber S’, damit gilt

$$k' = \sqrt{\frac{c+v'_2}{c-v'_2}} \Rightarrow k' = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{1-\frac{5}{13}}} = \frac{3}{2} \tag{26}$$

und somit

$$t''_4 = k'_2 \cdot t'_P \Rightarrow t''_4 = \frac{3}{2} \cdot 10h \Rightarrow t''_4 = 15h \tag{27}$$

e) Halbe Flugstrecke

$$x_Q = v_1 \cdot t_Q = v_1 \cdot \gamma t'_Q = \frac{3}{5} c \frac{5}{4} \cdot 10h = \frac{15h}{2} c \tag{28}$$

$$\Rightarrow x_Q = \frac{15}{2} Lh \tag{29}$$

$$x_S = \frac{x_Q}{2} = \frac{v_\gamma t'_Q}{2} \Rightarrow x_S = \frac{15}{4} Lh \tag{30}$$

Die Ereignisse liegen symmetrisch zu $x_S$. Der Abstand $|x'_{E2} - x'_{E1}|$ wird in S’ gemessen. Abstand $|x_{E2} - x_{E1}|$ in S durch Längenkontraktion. Die Ereignisse sind in S’ gleichzeitig. Damit entspricht $|x'_{E2} - x'_{E1}|$ der Eigenlänge.

$$|x'_{E2} - x'_{E1}| = \frac{|x_{E2} - x_{E1}|}{\gamma_1} = \frac{5}{4}\frac{8}{5} Lh = 2Lh \tag{31}$$

Die Ereignisse haben damit in S die Koordinaten

$$x_{Ei} = x_S \pm \frac{|x_{E2} - x_{E1}|}{2} = (\frac{15}{4} \pm 1)Lh \tag{32}$$

$$\Rightarrow x_{E1} = \frac{11}{4}Lh \qquad\qquad x_{E2} = \frac{19}{4}Lh \tag{33}$$

Die Gerade durch die Punkte $E_1$, $E_2$ und Q beschreiben eine Gleichzeitigkeitslinie in S'.

# Literatur


[1] Halliday Physik, The Bachelor Edition

[2] Demtröder Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik

[3] Vorlesung Experimentalphysik 2 von Prof. Hugel