Ferienkurs der Experimentalphysik II Teil IV Spezielle Relativitätstheorie

Michael Mittermair

29. August 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Spezielle Relativitätstheorie

1.1 Warum heißt das so?

Als Relativitätstheorie bezeichnet man die Theorie die sich mit der Messung und Transformation von Ereignissen in Bezugssystemen, die sich relativ zueinander bewegen, beschäftigt. Der Zusatz 'speziell' beschränkt die Theorie auf inertiale (also unbeschleunigte) Bezugssysteme. In solchen Systemen gelten die newtonschen Axiome.

1.2 Die Postulate

- **Das Relativitätspostulat**: Die Gesetze der Physik gelten für Beobachter in allen Inertialsystemen gleichermaßen. Kein Bezugssystem ist gegenüber anderen bevorzugt.

- **Das Postulat der Lichtgeschwindigkeit**: Im Vakuum breitet sich Licht in allen Richtungen und in allen inertialen Bezugssystemen mit derselben Geschwindigkeit c aus.

1.3 Was ist ein Ereignis

In der Relativitäs-Theorie arbeiten wir in erster Linie mit Ereignissen. Ein Ereignis kann so ziemlich alles sein. Die Erzeugung eines Teilchens, seine Vernichtung oder das Drücken eines Schalters. Man muss ihm nur eine Zeit- und eine Raumkoordinate zuordnen können.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{1}$$

Es handelt sich also um eine Momentaufnahme an einem bestimmten Ort in einem bestimmten Bezugssystem. um nicht den Überblick zu verlieren, sollte man sich immer folgende Fragen stellen:

- Für welches Bezugssystem sind die Koordinaten des Ereignisses definiert?

- In welchem Bezugssystem sitzt der Beobachter?

- Wie verhalten sich die Systeme zueinander?

1.4 Lorentz-Transformationen

Da wir uns auf räumlich eindimensionale Probleme beschränken benötigen wir nur zwei verschiedene Transformationen. Eine für den Ort, eine für die Zeit.

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad ; \qquad x = \gamma(x' + vt') \tag{2}$$

$$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \qquad ; \qquad t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2}) \tag{3}$$

Für Ereignispaare lassen sich die räumlichen und zeitlichen Abstände wie folgt transformieren.

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \qquad ; \qquad \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \tag{4}$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}) \qquad ; \qquad \Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}) \tag{5}$$

Mit den beiden Faktoren

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{6}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7}$$

1.5 Zeitdilatation

Wenn zwei Ereignisse im selben System S' am gleichen Ort ($\Delta x' = 0$) passieren, lässt sich die Lorentz-Transformation des Zeitintervalls vereinfachen.

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \underbrace{\frac{v\Delta x'}{c^2}}_{=0}) \tag{8}$$

Das Zeitintervall kann als Eigenzeitintervall Δt_0 bezeichnet werden. Die Formel für die Zeitdilatation lautet damit:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \tag{9}$$

Man erkennt, dass die Zeitdilatation unabhängig vom Vorzeichen der Geschwindigkeit ist. Ein sehr gutes und oft verwendetes Beispiel ist Entstehung und Vernichtung von Teilchen(wie Myonen) mit ihrer Lebensdauer als Eigenzeit Δt_0 in ihrem Eigensystem.

1.6 Längenkontraktion

Wir betrachten einen Gegenstand(z.B. einen Stock) in seinem Ruhesystem S'. Anfangs- und Endpunkt des Gegenstandes kann man als 2 gleichzeitige Ereignisse an unterschiedlichen Orten betrachten. Zwischen den Ereignissen lässt sich der Abstand $x_{Ende} - x_{Anfang} = \Delta x' = L_0$ als Eigenlänge definieren. Über die Lorentz-Orts-Transformation für Ereignispaarelässt sich mit $\Delta t = 0$ die Formel für die Längenkontraktion herleiten.

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x + \underbrace{v\Delta t}_{=0}) \tag{10}$$

Üblicherweise schreibt man sie mit L für die Länge im System S des Beobachters und der Eingenlänge L_0 im Eigensystem S'.

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \tag{11}$$

Auch die Längenkontraktion ist vom Vorzeichen der Geschwindigkeit unabhängig.
Anmerkung: Ein Gegenstand wird nur in Richtung der Geschwindigkeit kontrahiert. Es verringert sich also nur die Tiefe, nicht aber die Breite oder Höhe. Wenn also Luke Skywalker sehr schnell auf den Todesstern zufliegt, sieht er für ihn wie eine Scheibe aus.

1.7 Addition von Geschwindigkeiten

Geschwindigkeit ist bekanntermaßen die Ableitung des Ortes nach der Zeit.

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} \tag{12}$$

$$u'_x = \frac{d}{dt}\gamma(x - vt) \cdot \frac{d}{dt'}\gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') = (\gamma \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=u_x} - \gamma v) \cdot (\gamma + \gamma \frac{v}{c^2} \underbrace{\frac{dx'}{dt'}}_{=u'_x}) \tag{13}$$

Diese Gleichung kann man u'_x auflösen und erhält somit eine leicht anwendbare Formel. Analog lassen sich auch die Formeln für y- und z-Richtung bestimmen. Durch Tausch der Bezugssysteme $(x \leftrightarrow x'; t \leftrightarrow t'; v \leftrightarrow -v)$ können die rechten Gleichungen erzeugt werden.

$$u'_x = \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)} \qquad ; \qquad u_x = \frac{u'_x + v}{\left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)} \tag{14}$$

$$u'_{y/z} = \frac{u_{y/z}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)} \qquad ; \qquad u_{y/z} = \frac{u'_{y/z}}{\left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)} \tag{15}$$

1.8 Minkowski Diagramme

Die Unterschiede zwischen verschiedenen Bezugssystemen können mit Hilfe von Minkowskidiagrammen veranschaulicht werden. Im Grunde ist es nur eine besondere Art des x-t-Diagramms. In einem Minkowskidiagramm wird das Produkt von Zeit und Lichtgeschwindigkeit gegenüber dem Raum aufgetragen. Ereignisse können dann als Punkt im Koordinatensystem eingetragen werden.

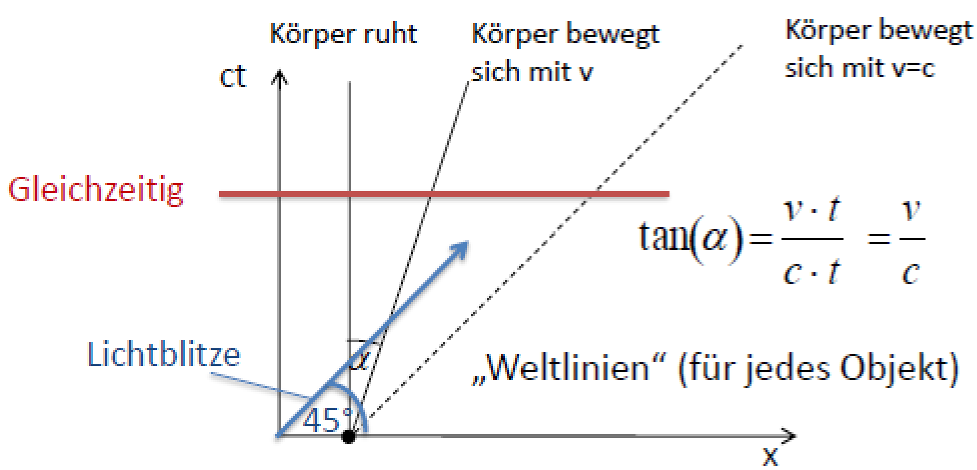

Abbildung 1: Minkowskidiagramm mit verschiedenen Weltlinien. Eingezeichnet sind die eines ruhenden und eines bewegten Körpers. Die des ruhenden verläuft parallel zur ct-Achse. Die des bewegten Körpers steht in einem gewissen Winkel α dazu. Für die Propagation von Licht ist der Winkel zur ct-Achse 45°.

Weltlinien beschreiben die Veränderung der Raum-Zeit-Koordinaten eines

Objekts. Für den Winkel den sie mit der ct-Achse einschließen gilt

$$tan(\alpha) = \frac{v}{c} = \beta \tag{16}$$

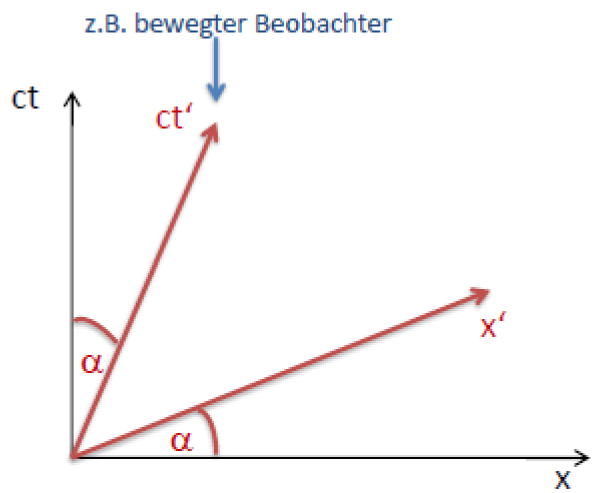

Abbildung 2: Minkowskidiagramm mit ct'- und x'-Achsen eines bewegten Bezugssystems

Wie man in Abbildung **??** sehen kann sind die Koordinatenachsen eines mit positiver Geschwindigkeit v bewegten Bezugssystems zusammengedrückt. Man benötigt eine neue Skalierung.

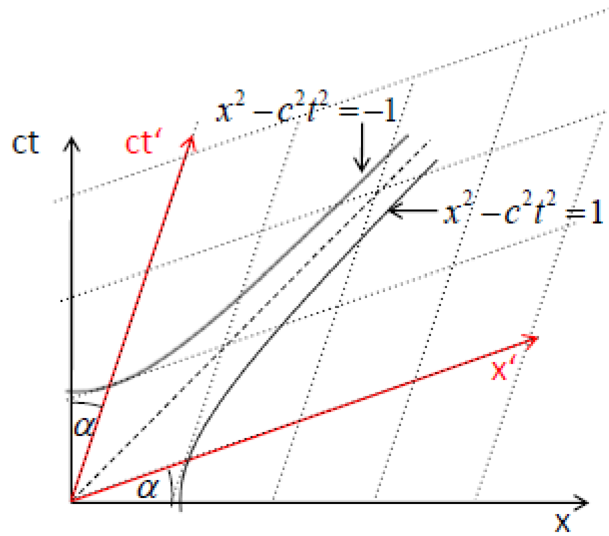

Abbildung 3: Minkowskidiagramm mit Weltlinien des bewegten Bezugssystems und neuer Skalierung. Die skalierung wird für alle Systeme durch die beiden hyperbolischen Funktionen vorgegeben.

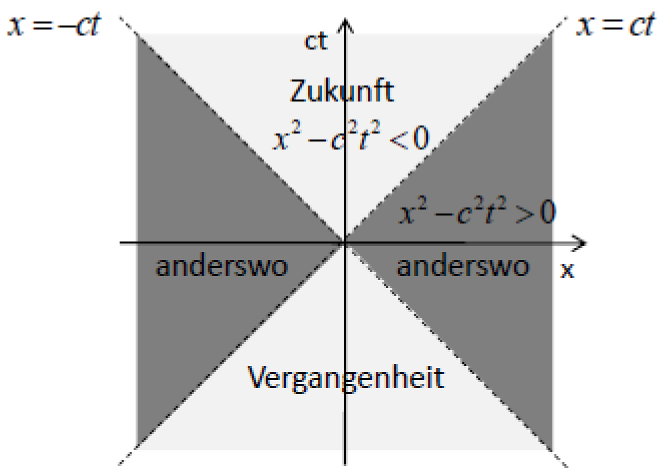

Abbildung 4: Minkowskidiagramm zur Verdeutlichung der Begriffe raumartig und zeitartig.

In Abbildung **??** wird die Trennung von raumartigen(dunkel) und zeitartigen(hell) Ereignissen dargestellt. Findet ein Ereignis am Ursprung statt, so kann es nur Ereignisse im Bereich Zukunft beeinflussen und selbst nur durch Ereignisse in der Vergangenheit beeinflusst worden sein. Mit Ereignissen in den dunklen Bereichen kann keine Interaktion stattfinden.

1.9 Vierervektoren

Will man alle drei Raumdimensionen verwenden, geht man über zu Vierervektoren über.

$$\chi_\mu = (ct, x, y, z) \tag{17}$$

mit dem Viererskalaprodukt

$$\chi_\mu \cdot \chi^\mu = (ct, x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{18}$$

1.10 Energie und Impuls

Bewegt sich ein Teilchen der Ruhemasse m_0 mit relativistischer Geschwindigkeit, so erhöht sich seine Masse

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{19}$$

Der relativistische Impuls ist definiert als

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} \tag{20}$$

Für die relativistische kinetische Energie gilt

$$E_{kin} = m_0 c^2 (\gamma - 1) \tag{21}$$

Außerdem gibt es die Energie-Impuls Relation

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2 c^4 \tag{22}$$

Literatur

[1] Halliday Physik, The Bachelor Edition

[2] Demtröder Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik

[3] Vorlesung Experimentalphysik 2 von Prof. Hugel