Ferienkurs der Experimentalphysik II Musterlösung Übung 3

Michael Mittermair

29. August 2013

Aufgabe 1

Wie groß ist die Leistung, die von einem geladenen Teilchen mit der Ladung q abgestrahlt wird, das sich mit der Geschwindigkeit $v << c$ in einer Ebene senkrecht zu einem Magnetfeld B bewegt? Wie ändert sich dadurch seine Geschwindigkeit v und sein Bahnradius R?

Lösung Aufgabe 1

Gleichsetzen

$$F_L = qvB = ma = \frac{mv^2}{r} \tag{1}$$

$$\Rightarrow a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = \frac{q}{m}vB = \frac{qr\omega B}{m} = \frac{p_0\omega B}{2m} \tag{2}$$

Die Kreisbewegung der Ladung kann man als zwei getrennte Hertz'sche Dipole betrachten, die senkrecht aufeinander stehen.Die abgestrahlte Energie pro Sekunde ist :

$$2 \cdot \bar{P} = 2 \cdot \frac{p_0^2 \cdot \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{q^4 v^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \tag{3}$$

Dabei wurde verwendet, das $p_0 = rq$ und $v = r\omega$ ist. Die abgestrahlte Leistung ist dann gleich der Änderung der kinetischen Energie.

$$\frac{d}{dt}E_{kin} = mv\frac{dv}{dt} = \frac{q^4 v^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{q^4 v B^2}{6\pi\epsilon_0 m^3 c^3} \tag{5}$$

Wobei die Änderung $\frac{dv}{dt}$ des Betrages der Geschwindigkeit als klein angenommen wurde gegen die Änderung a der Richtung der Geschwindigkeit.
Aus

$$R = \frac{mv}{qB} \tag{6}$$

Gleichsetzen von Lorentzkraft und Zentripetalkraft gibt eine Bedingung für den Radius der Bahn

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{m}{qB}\frac{dv}{dt} = \frac{q^3 v B}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \tag{7}$$

Aufgabe 2

Leiten sie aus den Maxwellgleichungen die Wellengleichung im Vakuum her. Sie lautet

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}} = 0 \tag{8}$$

Lösung Aufgabe 2

Man benötigt das Amperesche und Faradaysche Gesetz.

$$\nabla \times B - \frac{1}{c^2}\dot{E} = 0 \tag{9}$$

$$\nabla \times E + \dot{B} = 0 \tag{10}$$

Außerdem verschwindet die Divergenz des E-Feldes im Vakuum

$$\nabla E = 0 \tag{11}$$

$$\nabla \times E = -\dot{B} \tag{12}$$

$$\nabla \times \nabla \times E = \nabla \times (-\dot{B}) \tag{13}$$

$$\nabla \times \nabla \times E = -\frac{d}{dt}(\nabla \times B) \tag{14}$$

linke Seite:

$$\nabla \times \nabla \times E = -\Delta E - \nabla \underbrace{(\nabla \cdot E)}_{=0} \tag{15}$$

$$-\Delta E = -\frac{d}{dt}\underbrace{(\nabla \times B)}_{\frac{1}{c^2}\dot{E}} \tag{16}$$

Daraus folgt dann auch schon direkt die Wellengleichung

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}} = 0 \tag{17}$$

Aufgabe 3

Zeigen sie, dass jede linear polarisierte Welle als Linearkombination zweier zirkular polarisierter Wellen mit entgegengesetztem Drehsinn geschrieben werden können.

Lösung Aufgabe 3

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann eine linear polarisierte Welle geschrieben werden als

$$\vec{E}_{lin} = E \begin{pmatrix} cos(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\vec{E}_{\pm} = E \begin{pmatrix} cos(\omega t) \\ \pm sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Damit folgt

$$\vec{E}_{+} + \vec{E}_{-} = E \begin{pmatrix} cos(\omega t) \\ sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} cos(\omega t) \\ -sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} cos(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{E}_{lin} \tag{20}$$

Aufgabe 4

Ein Kondensator aus planparallelen, kreisförmigen Platten mit der Kapazität C wird mit dem konstanten Strom I aufgeladen.
a) Man bestimme das elektrische und magnetische Feld während der Aufladung.
b) Wie groß ist der Poynting-Vektor?
c)Drücken Sie die Gesamtenergie, die in den Kondensator mit Ladung Q geflossen ist, zum einen durch $|S|$ und zum anderen durch Q und C aus.

Lösung Aufgabe 4

a) Kondensator mit kreisförmiger Fläche der Platten $A = R^2\pi$ und dem Plattenabstand d.

$$Q = CU = \epsilon_0 A \cdot \frac{A}{d} U = \epsilon_0 A E \tag{21}$$

mit $\vec{E} = (0, 0, E)$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 A \frac{\partial E}{\partial t} \tag{22}$$

Für das B-Feld verwendet man das Amper'sche Gesetz

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = B(r) 2\pi r = \mu_0 \cdot \frac{r^2}{R^2} I \tag{23}$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \tag{24}$$

radial zur z-Achse also $\vec{B} = (B_x, B_y, 0)$
b) Der Poynting-Vektor ist gemeinhin

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B}) \tag{25}$$

Er hat nur radiale Komponenten, senkrecht zur z-Achse. Sein Betrag ist

$$|\vec{S}| = \epsilon_0 c^2 \cdot \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot \frac{\mu_o I}{2\pi R^2} r = \frac{QIr}{2\epsilon_0 A^2} = \frac{r}{2\epsilon_0 A^2} \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} Q^2) \tag{26}$$

c) Der durch die Zylinderfläche $2\pi r d$ strömende Energiefluss ist pro Sekunde

$$\frac{dw}{dt} = |S| 2\pi r d = \frac{\pi r^2 d}{\epsilon A^2} \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} Q^2) = \frac{\pi r^2}{A} \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} C U^2) \tag{27}$$

Dies ist der im Volumen $\pi r^2 d$ gespeicherte Teil der Gesamten Kondensatorenergie $\frac{1}{2} C U^2$

Aufgabe 5

Durch einen geraden Draht($r = 3mm, \sigma = 0,03\Omega/m, L = 100m$) fließt ein Strom von 10A. Berechne sowohl das E- und B-Feld als auch den Poyntinvektor auf der Oberfläche des Drahtes.

Lösung Aufgabe 5

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der Draht in z-Richtung orientiert.

$$U = RI = \sigma L I = 30V \tag{28}$$

Das E-Feld geht entlang des Drahtes und hat daher auch nur eine z-Komponente

$$E = \frac{U}{L} = o,3 \frac{V}{m} \tag{29}$$

Magnetfeld an der Oberfläche entspricht dem eines dünnen Leiter im Abstand 3mm und hat nur eine radiale Komponente.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 0,67Tm \tag{30}$$

Der Poyntingvektor zeigt immer Richtung Draht(Rechte Hand) und das Kreuzprodukt vereinfacht sich zu einem Skalar

$$\frac{1}{\mu_0} E \cdot B = \frac{UI}{2\pi r L} \tag{31}$$

Integriert über die gesamte Mantelfläche des Drahtes $2\pi r L$ ergibt dies eine Gesamtleistung $P = UI$, was dem ohmschen Verlust an einem Widerstand entspricht.

Aufgabe 6

Man berechne für einen koaxialen Wellenleiter mit Innenradius a und Außenradius b die Kapazität C pro Meter, die Induktivität L pro Meter und den Wellenwiderstand Z_0. Wie groß muss für a= $1mm$ b gewählt werden damit $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 100\Omega$ erfüllt ist?

Lösung Aufgabe 6

Für das E-Feld gilt(vgl. Zylinderkondensator)

$$E = \frac{q*}{2\pi\epsilon_0} \vec{e}_r \tag{32}$$

mit der Ladung pro Längeneinheit $q* = Q/l$ Die Spannung ist damit

$$U = \int_a^b E dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} ln(\frac{b}{a}) \tag{33}$$

Für die Kapazität pro Längeneinheit

$$c* = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{ln(b/a)} \tag{34}$$

Die Induktivität erhält man aus dem magn. Fluss $L = \frac{\Phi_m}{I}$ Mit dem magn. Fluss als Flächenintegral über das B-Feld $\Phi_m = \int BdA$ Für das B-Feld kann man das eines unendlichen dünnen Drahtes verwenden. $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$l* = \frac{\mu_0}{2\pi} ln(b/a) \qquad \Rightarrow c * l* = \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \tag{35}$$

Das Produkt von c* und l* ist also unabhängig von der Geometrie des koaxialen Leiters. Der Wellenwiderstand ergibt sich zu

$$Z_0 = \sqrt{\frac{l*}{c*}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} ln(b/a) = \frac{\mu_0 c}{2\pi} ln(b/a) \tag{36}$$

$$\Rightarrow b = ae^{\frac{2\pi Z_0}{\mu_0 c}} \tag{37}$$

In unserem Fall lässt sich b durch Einsetzen berechnen.

$$\Rightarrow b = 5,3mm \tag{38}$$

Aufgabe 7

Aus der Linearität der Wellengleichung folgt, dass jede Linearkombination der Wellenamplitude von Lösungen wieder eine Lösung ergibt. Gilt dies auch für die Intensitäten der Wellen? Gibt es Fälle bei denen man die Intensitäten zweier Teilwellen addieren kann, um die Gesamtintensität zu bekommen?

Lösung Aufgabe 7

Aus $E = a_1 E_1 + a_2 E_2$ folgt

$$I = \epsilon_0 c E^2 = \epsilon_0 c [a_1^2 E_1^2 + a_2^2 E_2^2 + 2a_1 a_2 E_1 E_2] \tag{39}$$

Mit $E_i = E_{0i} cos(\omega t + \phi_i)$ erhalten wir

$$\bar{I} = \epsilon_0 c \bar{E}^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c [a_1^2 E_{01}^2 + a_2^2 E_{02}^2 + 2a_1 a_2 E_{01} E_{02} cos(\phi_1 - \phi_2)] = \tag{40}$$

$$= \bar{I}_1^2 + \bar{I}_2^2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \overline{cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

Für inkohärentes Licht schwankt die Phasendifferenz, sodass der Mittelwert des Kosinus $\overline{cos(\phi_1 - \phi_2)} = 0$ wird. Die Gesamtintensität ist damit gleich der Summe der Einzelidentitäten. Bei kohärentem Licht(z.B. aus einem TiSa-Laser) ist die Phasendifferenz Null wodurch der Kosinus gleich eins wird. Die Intensität ist dann nicht linear.

Literatur

[1] Halliday Physik, The Bachelor Edition

[2] Demtröder Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik

[3] Vorlesung Experimentalphysik 2 von Prof. Hugel