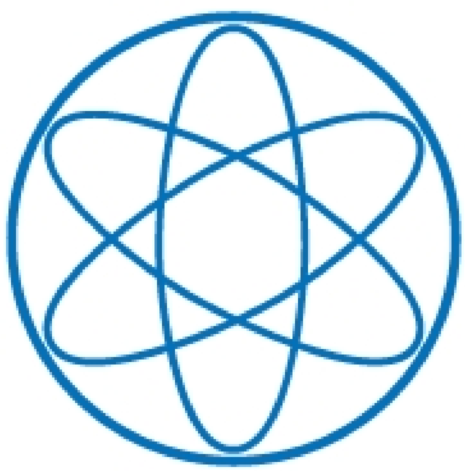
Ferienkurs Teil III
Elektrodynamik

Michael Mittermair

27. August 2013



Inhaltsverzeichnis

1 Elektromagnetische Schwingungen

1.1 Wiederholung des Schwingkreises

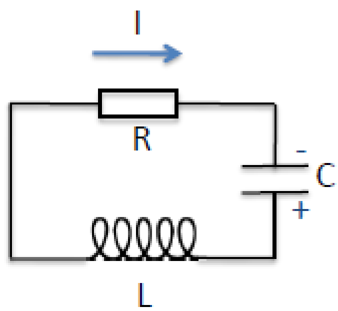


Abbildung 1: Schwingkreis bestehend aus Kondensator, Spule und Widerstand. Man nennt diese Schaltung auch LRC-Glied

Durch die Maschenregel erhält man eine Differentialgleichung für die Spannungen an den Elementen des RLC-Kreises.

$$RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0 \tag{1}$$

Da die Maschenregel für jede Zeit erfüllt sein muss, muss auch ihre zeitliche Ableitung gleich Null sein.

$$R\dot{I} + \frac{I}{C} + L\ddot{I} = 0$$

Man verwendet den allgemeinen exponentiellen Lösungsansatz für Differentialgleichungen $I(t) = c \cdot e^{\lambda t}$ und erhält zwei Lösungen.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Man verwendet häufig die Abklingkonstante $\beta := \frac{R}{2L}$ und Eigenfrequenz $\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \tag{2}$$

Man kann 3 Fälle betrachten:

Starke Dämpfung $\beta > \omega_0$

$$\alpha := \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \qquad\qquad I(t) = e^{-\beta t}(c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}) \tag{3}$$

Aperiodischer Grenzfall $\beta = \omega_0$
Die Wurzel verschwindet und die vollständige Lösung lautet

$$I(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\beta t} \tag{4}$$

Schwache Dämpfung $\beta < \omega_0$

$$\omega^2 := \beta^2 - \omega_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \underbrace{-\beta}_{Abklingen} \pm \underbrace{i\omega}_{Oszillation} \tag{5}$$

Lösung

$$I(t) = Ae^{-\beta t} \cdot cos(\omega t + \phi) \tag{6}$$

Für $\beta = 0$ erhält man den Grenzfall des ungedämpften Schwingkreises.

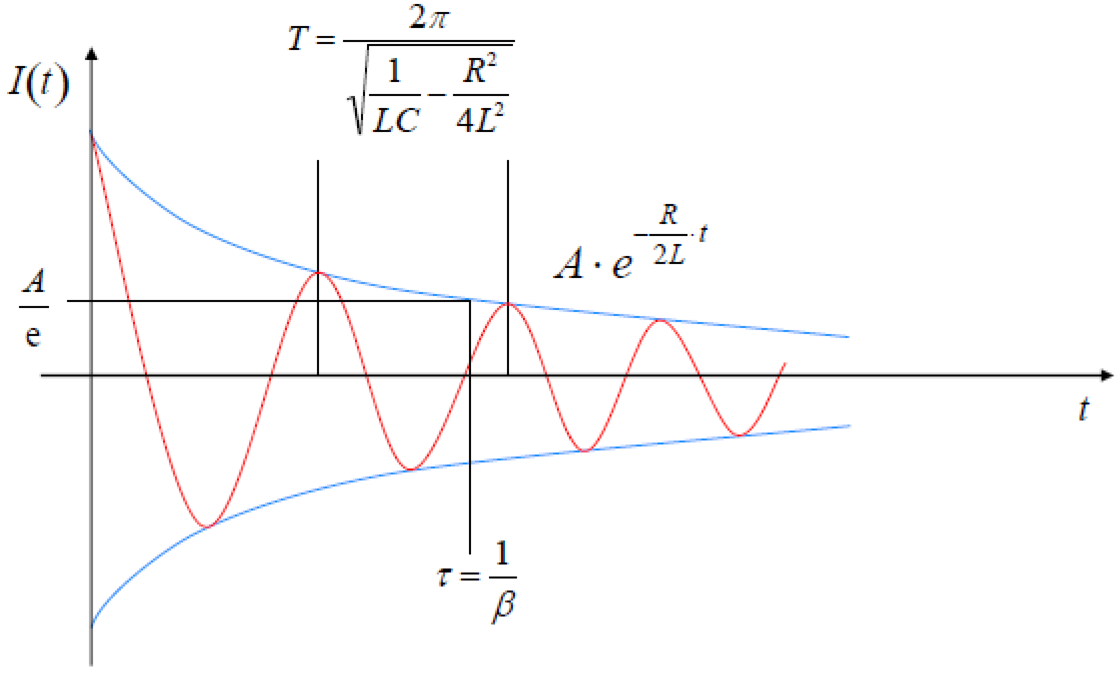


Abbildung 2: Der gedämpfte Schwingkreis. Die rote Funktion zeigt den tatsächlichen Verlauf der Stromamplitude. Die blaue Funktion verdeutlicht die Einhüllende, die durch den exponentiellen Abfall zustande kommt

1.2 der Hertz'sche Dipol

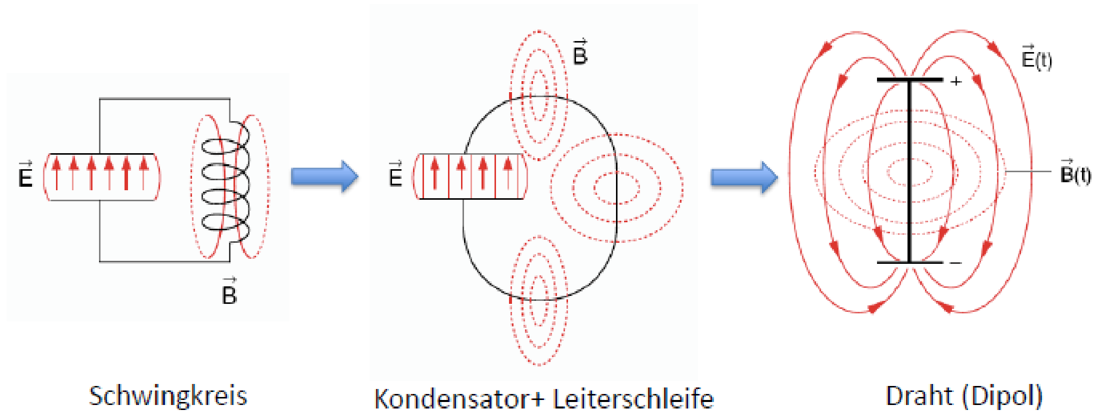


Abbildung 3: Darstellung der Überführung eines Schwingkreises in einen Hertz'schen Dipol

Jeder mit Wechselstrom betriebene Draht ist also in gewisser Hinsicht ein Hertz'scher Dipol bzw. eine Antenne und kann zum Aussenden oder Empfangen von Elektromagnetischer Strahlung dienen. Dies ist nur möglich wenn eine stehende Welle im Stab entsteht. Die möglichen Wellenlängen sind $\lambda = \frac{2L}{n}$ mit der Stablänge L und der Anzahl der Schwingungsbäuche n.
Das Dipolmoment des Hertz'schen Dipols kann als

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \tag{7}$$

ausgedrückt werden.
Gesamtstrahlleistung des Hertz'schen Dipols

$$\bar{P}_{em} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \tag{8}$$

2 Elektromagnetische Wellen

2.1 Wellengleichung

Ausgehend von den Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

kann man die Wellengleichung für E- und B-Feld darstellen

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

Lösung sind Wellen die sich mit der Lichtgeschwindigkeit $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ im Vakuum oder mit $c^2_{Medium} = \frac{c^2}{n^2} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}$ im Medium als Phasengeschwindigkeit ausbreiten.

Als einfachsten Fall betrachtet man die eindimensionale Ausbreitung in eine Richtung(hier $\vec{e}_z$) mit $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0$.
Da die Divergenz des E-Feldes im ladungsfreien Raum verschwindet muss auch $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ sein.
Man spricht von ebenen Wellen. Sie werden allgemein durch Funktionen gelöst, bei denen die Zeit und der Ort wie folgt verknüpft sind.

$$E_x(z,t) = f_x(z-ct) + g_x(z+ct) \qquad E_y(z,t) = f_y(z-ct) + g_y(z+ct) \tag{10}$$

es handelt sich also um **transversal schwingende Wellen**, weil $E_z = const$ ist.

Eine äquivalente Schreibweise erhält man durch

$$E_{x,y}(z,t) = f_{x,y}(kz - \omega t) + g_{x,y}(kz + \omega t) \tag{11}$$

mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und der Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ Es gilt

$$v_{ph} = c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \tag{12}$$

2.2 Periodische Wellen

Häufige ist die Lösung für eine Ebene Wellen durch eine periodische Funktion gegeben(z.B. cosinus, sinus, e-Funktion). Die Funktion ist sowohl in der Zeit als auch im Raum periodisch.

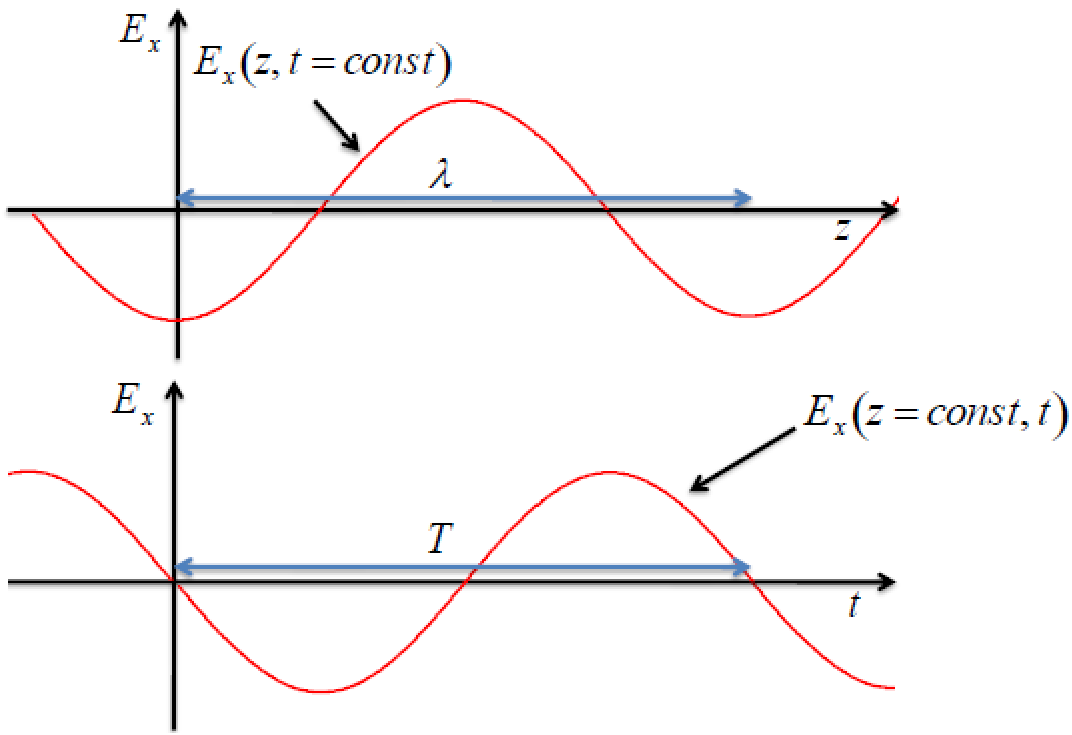


Abbildung 4: Im ersten Graphen ist das E-Feld gegen die Ausbreitungsrichtung aufgetragen, im zweiten gegen die Zeit. Man erkennt, dass die Funktion in beiden Parametern gleichermaßen periodisch sein muss.

Man kann die Ausbreitungsrichtung ebener Wellen durch den Wellenvektor $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ verallgemeinern.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \tag{13}$$

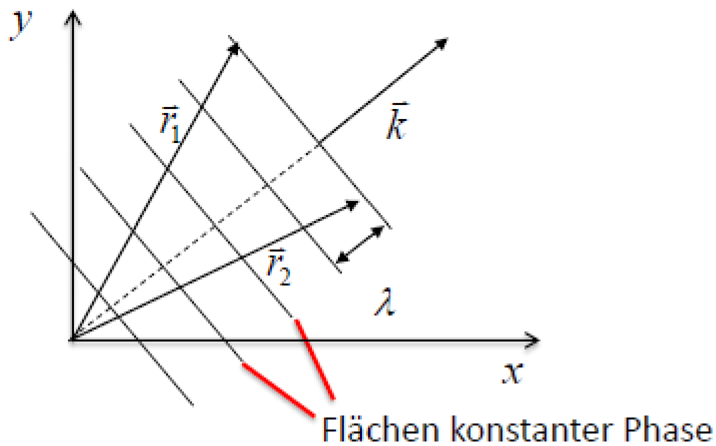


Abbildung 5: Der Wellenvektor $\vec{k}$ steht senkrecht auf Flächen gleicher Phase. Die Wellenlänge λ entspricht dem Abstand phasen-gleicher Flächen.

2.3 Polarisation

Wenn das E-Feld in nur einer ebene schwingt spricht man von linear polarisiertem Licht. Dies ist der Fall, wenn beide transversalen Komponenten in Phase sind. $\vec{E}_0$ hat dann zu jeder Zeit und an jedem Ort die selbe Orientierung.
Bei einer Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$ bzw. 90° spricht man von zirkular polarisiertem Licht. Wenn die y-Komponente gegenüber der x-Komponente positiv phasenverschoben ist, gilt das Licht als links-polarisiert. Eilt die x-Komponente voraus, wird das Licht als rechts-polarisiert bezeichnet.

2.4 Stehende Wellen

Zwischen zwei perfekt leitenden Oberflächen können sich stehende Wellen ausbilden. Dabei gilt, dass die transversalen E-Feld-Komponenten auf den Oberflächen 0 sein müssen. Diese Randbedingung kann nur erfüllt werden, wenn der Abstand der Oberflächen ein Vielfaches der halben Wellenlänge also $d = n\frac{\lambda}{2}$ beträgt.

2.5 Brechung und Reflexion

Licht nimmt immer den schnellsten Weg zwischen zwei Punkten(Fermatsches Prinzip). An Grenzflächen an denen sich der Brechungsindex und somit die Phasengeschwindigkeit ändert, kommt es daher zu Brechung nach dem Snelliussches Brechungsgesetz.

$$\frac{sin(\Theta_1)}{sin(\Theta_2)} = \frac{v_{ph1}}{v_{ph2}} = \frac{n_2}{n_1} \tag{14}$$

Für Reflexion gilt: Einfallswinkel gleich Ausfallwinkel

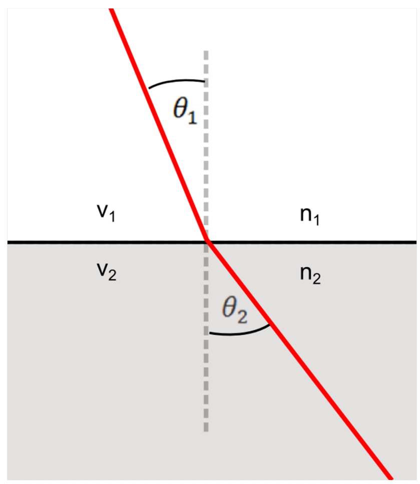


Abbildung 6: Graphische Darstellung des Snellius'schen Brechungsgesetzes. Der Weg eines Lichtstrahls durch eine Grenzfläche zweier dielektrischer Medien ist rot eingezeichnet.

2.6 Intensität und Impuls von EM-Wellen

Der Poynting-Vektor gibt Richtung und Stärke des Energieübertrags einer elektromagnetischen Welle an. Er ist definiert als

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 c^2(\vec{E} \times \vec{B}) \tag{15}$$

Für die Intensität gilt

$$I(t) = |\vec{S}(t)| = c\epsilon_0 \vec{E}^2(t) \tag{16}$$

Hierbei wurde verwendet, dass E- und B-Feld über $E = cB$ miteinander verknüpft sind.
Oft wird die gemittelte Intensität $< I >$verwendet. Man erhält sie indem man die zeitabhängige Intensität über eine Periode integriert und durch die Periodendauer teilt. Für linear polarisiertes Licht ergibt sich

$$< I >= \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \tag{17}$$

und für zirkular polarisiertes Licht

$$< I >= c \epsilon_0 E_0^2 \tag{18}$$

Für die Impulsdichte einer EM-Welle gilt

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{S}}{c^2} \tag{19}$$

ihren Betrag kann man auch als

$$|\vec{\pi}| = \frac{w_{em}}{c} \tag{20}$$

ausdrücken.
Der Strahlungsdruck ist dann durch

$$p_{rad} = c|\vec{\pi}| = w_{em} \tag{21}$$

Literatur

[1] Halliday Physik, The Bachelor Edition

[2] Demtröder Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik

[3] Vorlesung Experimentalphysik 2 von Prof. Hugel