Physik-Department

Ferienkurs zur Experimentalphysik

Daniel Jost

27/08/13

Technische Universität München

Inhaltsverzeichnis

1 Magnetostatik

Anfangs noch ein mal die Maxwellgleichungen im Vakuum wie in der letzten Vorlesung:

Definition 1.1. Die Maxwellgleichungen im Vakuum lauten

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Und die Lorentzkraft:

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{1}$$

1.1 Gleichungen der Magnetostatik

Die Argumentation für den elektrostatischen Fall lässt sich ebenfalls auf Magnetfelder applizieren. Die Zeitunabhängigkeit der Stromdichte und der Ladungsträgerdichte entkoppeln magnetisches und elektrisches Feld. Im Rahmen der Magnetostatik betrachtet man

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{j} \tag{2}$$

Die Divergenz des Magnetfelds ist immer Null (auch in den zeitabhängigen Fällen). Das bedetuet, dass dieses Vektorfeld keine Quellen und Senken besitzt. Es existieren also keine magnetischen Monopole (magnetische Ladungsträger). Wendet man den Satz von Gauß auf diese Gleichung an, so erhält man die Definition des magnetischen Flusses:

$$\Phi_\mathrm{m} = \int_A \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \tag{3}$$

Das Integral über beliebige Wege entlang des magnetischen Felds verschwindet. Das bedeutet, dass die Magnetfeldlinien nirgendwo „anfangen “oder „aufhören “, oder in analoger Formulierung geschlossen sind.
Auf eine Probeladung q mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ wirkt in Abwesenheit eines $\mathbf{E}$-Felds nach Gleichung 1 die Kraft

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{4}$$

Analog zum elektrischen Dipol, lässt sich das magnetische Dipolmoment $\mathbf{m}$ wie folgt definieren: Umfließt ein Strom I die Fläche $\mathbf{A}$, dann gilt für das zugehörige Dipolmoment

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A} \tag{5}$$

Für das Drehmoment eines magnetischen Dipols in einem Magnetfeld $\mathbf{B}$ gilt ferner

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \tag{6}$$

1.2 Das Vektorpotential

In der Elektrostatik kann man ein elektrisches Potential Φ_{el} finden, da das elektrische Feld konservativ ist, also insbesondere dessen Rotation verschwindet. Für die Magnetostatik gilt dies offensichtlich nicht. Es wird stattdessen das so genannte Vektorpotential eingeführt

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{7}$$

das die Bedingung $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ erfüllt. An dieser Stelle sei an die Theorievorlesung zur Elektrodynamik verwiesen.

1.3 Biot-Savart

In der Elektrostatik ist es möglich aus einer beliebigen Ladungsverteilung das Potential mittels Poisson-Gleichung zu bestimmen. Für ein magnetisches Feld ergibt sich nach Analyse von Gleichungen 2 ein ähnlicher Zusammenhang mit der Stromdichte $\mathbf{j}$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathrm{d}V \tag{8}$$

Aus der Definition des Vektorpotentials kann man folgern:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \mathrm{d}V \tag{9}$$

Reduzieren lässt sich diese Gleichung im Sonderfall eines dünnen, unendlich langen Drahtes.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{10}$$

1.4 Das Ampère'sche Gesetz

Bezüglich der Klausurrelevanz ist das Ampèresche Gesetz wie auch Biot-Savart von gesonderter Bedeutung. Für einen besonderen Aufgabentypus gibt es immer die Möglichkeit das Problem entweder mit Biot-Savart oder Ampère zu lösen.
Für eine gegebene Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$, die eine Querschnittsfläche A durchläuft, lässt sich

die zweite Maxwellgleichung der Magnetostatik mit dem Satz von Stokes umformen. Zunächst gilt:

$$\int_A \vec{\nabla} \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \mu_0 \int_A \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

Wendet man nun den Satz von Stokes an, so wird aus dem Integral auf der rechten Seite ein Linienintegral über den Rand ∂A der Fläche A:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 \int_A \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \tag{11}$$

Ein Beispiel: Ein unendlich langer, dünner Leiter wird vom Srom der Stärke I durchflossen. In diesem Fall ergibt die Rechte-Hand-Regel für die vorgegebene Stromrichtung als Ansatz für das Magnetfeld $\mathbf{B} = B \cdot \mathbf{e}_\varphi$ in Zylinderkoordinaten. Mit Gleichung 11

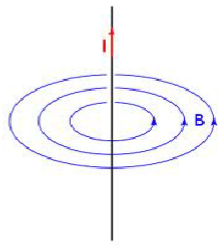

Abbildung 1: Beispiel zur Verwendung des Ampère'schen Gesetzes.

ergibt sich auf der linken Seite das Integral über einen Kreis mit Radius r.

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^r \mathrm{d}r \cdot B(r) = 2\pi r \cdot B(r) \tag{12}$$

Insgesamt erhält man also für die magnetische Feldstärke

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{e}_\varphi$$

Als Integrationsweg kann man beliebige Geometrien wählen, was aber auch die Berechnung beliebig kompliziert macht. Wie bereits in der ersten Vorlesung erwähnt, reduzieren sich die einfachen Geometrien auf wenige Spezialfälle.

2 Zeitlich veränderliche Felder

Bis hier wurden zeitlich konstante Felder betrachtet, also insbesondere Fälle, in denen $\partial\rho/\partial t = 0$ und $\partial\mathbf{j}/\partial t = 0$. In der Elektrostatik wurde der Kondensator als technische Realisierung statischer elektrischer Felder besprochen. Die Spule liefert ein Analogon für zeitlich veränderliche Felder.

2.1 Induktionsgesetz

Man nennt die Kopplung des elektrischen Felds mit der Zeitableitung des magnetischen Felds Induktionsgesetz.

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{13}$$

Betrachtet man nun eine Spule mit **einer** Windung, die die Fläche A umschließt, so lässt sich ein Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld finden. Integriert man über die Fläche, so findet man für die linke Seite mit dem Satz von Stokes

$$\int_A \vec{\nabla} \times \mathbf{E} \mathrm{d}\mathbf{A} = \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

einen Ausdruck für die Spannung in der Spule. Insgesamt also

$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \mathrm{d}\mathbf{s} = -\int_A \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \tag{14}$$

Das Induktionsgesetz kann auch anders geschrieben werden:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} \tag{15}$$

Die totale Zeitableitung des Integrals liefert eigentlich noch einen zusätzlichen Term, der einen Beitrag auf der linken Seite erzeugt. Daher spricht man vom effektiven elektrischen Feld. Es spielt hier keine Rolle, weil es leidiglich um die Rechnung geht. Wichtig ist nur, dass der Begriff des elektrischen Felds in diesem Zusammenhang etwas schlampig verwendet wird. Erweitert man die Spule nun um N Windungen, ergibt sich eine um den Faktor N größere Induktionsspannung, was direkt aus der Superposition des elektrischen und magnetischen Felds folgt.

$$U_{\text{ind}} = -N \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A \mathbf{B} \cdot \mathrm{dA} = -N \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} \tag{16}$$

2.2 Selbstinduktion

Eine qualitative Diskussion lässt sich auch darüber führen, was passiert, wenn man nun den Strom in einer Spule verändert. Tatsächlich findet man, dass die Stromänderung direkt proportional zur Magnetfeldänderung bzw. zum magnetischen Fluss ist, also

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \frac{L}{N} \cdot I \tag{17}$$

mit der Induktivität L der Spule. Man erhält also

$$U_{\text{ind}} = -L \cdot \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = -L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{18}$$

Betrachtet man beispielsweise eine Spule, die mit einem Widerstand R in Reihe geschaltet und mit einer Spannungsquelle U_0 verbunden ist. Die Differentialgleichung, die diesen Aufbau beschreibt, ist

$$U_0 - L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - R \cdot I = 0$$

Die Lösung dieser DGL ist

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - \exp\left[-\frac{R}{L}t\right]\right) \tag{19}$$

Zu beachten ist das Vorzeichen: Formal richtig ist es, die Spule als Spannungsquelle zu interpretieren. Daher wird sie positiv gezählt. Das negative Vorzeichen kommt durch Gleichung 18. Deutlich wird das, wenn man die Spannungsquelle aus dem Aufbau entfernt. Die entsprechende Differentialgleichung

$$-L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - R \cdot I = 0 \;\leftrightarrow\; L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + R \cdot I = 0$$

wird mit der Exponentialfunktion

$$I(t) = I_0 \cdot \exp\left[-\frac{R}{L}t\right] \tag{20}$$

gelöst.

2.3 Energie im magnetischen Feld

Beim Kondensator wird eine elektrisches Feld generiert, das Energie speichert. Analog dazu findet man auch die Energie, die vom Magnetfeld einer Spule gespeichert wird. Das Beispiel, das gerade besprochen wurde, liefert eine Möglichkeit die Energie zu berechnen. Man entlädt die Spule über den Widerstand R. Für die Leistung gilt $P(t) = U \cdot R = R \cdot I^2$. Die dabei entstehende Energie ist dann

$$W_{\mathrm{magn}} = \int_0^\infty P(t)\;\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{d}t\; R \cdot I^2(t) = \frac{1}{2}LI_0^2 \tag{21}$$

3 Wechselstromkreise und Impedanz

Bis jetzt ging es um Auswirkungen der Änderung der Stromstärke oder des Pontentialgefälles auf elektrische Felder. Richtungsänderungen sind natürlich zulässig. Technisch spricht man von Wechselspannungen, die in periodischen Zeitabständen die Polung der Spannungsquelle ändern. Die einfachsten zu diskutierenden Fälle sind sinus- und cosinusförmige Eingangsspannungen, als etwa

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

Die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ ist konstant. Manchmal ist es einfacher die komplexe Schreibweise für die Wechselspannung einzuführen[1], also

$$U(t) = \widehat{U} \cdot \exp[i\omega t]$$

mit der komplexen, zeitunabhängigen Amplitude $\widehat{U}$. Der Realteil der komplexen Funktion liefert die tatsächliche zeitabhängige Spannung. Ebenso kann man mit dem Strom verfahren, hier ohne Phasenverschiebung:

$$I(t) = \widehat{I} \cdot \exp[\mathrm{i}\omega t]$$

Die Diskussion über Wechselstromkreise kann man sich noch ein Mal zu nutze machen, um sich mit der Induktivität, der Kapazität und dem ohmschen Widerstand im Hinblick auf ihr Verhalten bei Anlegen einer Wechselspannung vertraut zu machen. Bei Gleichstromschaltungen konnte festgestellt werden, dass es bei Durchlaufen eines Widerstands[2] zu einem Spannungsabfall kommt. Bei Wechselspannungen kommt es hingegen zu einer Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom. Man definiert dann die so genannte Impedanz:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{\widehat{U}}{\widehat{I}} \tag{22}$$

Sie ist gewöhnlich von der Frequenz ω abhängig.

3.1 Die Induktivität

Betrachtet man einen Draht, wickelt ihn zu einer Spule auf und schließt die Kontakte an, lässt sich unter der Annahme keiner signifikanten Wechselwirkung mit dem restlichen Stromkreis und

$$U(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = L\mathrm{i}\omega\widehat{I}\exp[\mathrm{i}\omega t]$$

sowie Gleichung 22 der Zusammenhang für die Impedanz einer Spule herleiten:

$$Z_L = \mathrm{i}\omega L \tag{23}$$

[1] Gauß: $\exp[i(\omega t - \varphi)] = \cos(\omega t - \varphi) + i \sin(\omega t - \varphi)$

[2] In diesem Kontext ist damit nicht nur der ohmsche Widerstand gemeint, sondern auch die Spuleninduktivität und Kondensatorkapazität.

3.2 Impedanz des ohmschen Widerstands

Die gleiche Überlegung wie bei der spule kann man nun mit einem ohmschen Widerstand mit $U(t) = R \cdot I(t)$ anstellen. Die Impedanz ist dann

$$Z_R = R \tag{24}$$

also insbesondere reell und unabhängig von ω, das heißt die Spannung durch einen Widerstand ist in Phase mit dem Strom.

3.3 Impedanz des Kondensators

Die Kapazität eines Kondensators ist natürlich immer noch $C = \frac{Q}{U}$. Einsetzen in Gleichung 22 liefert

$$Z_C = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} \tag{25}$$

3.4 Schwingkreis

Betrachtet man nun einen Schwingkreis wie in Abbildung 2, dann findet man mit den Kirchhoffschen Regeln eine Differentialgleichung der Form

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} + RI = 0 \tag{26}$$

Das entspricht der Differentialgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators.

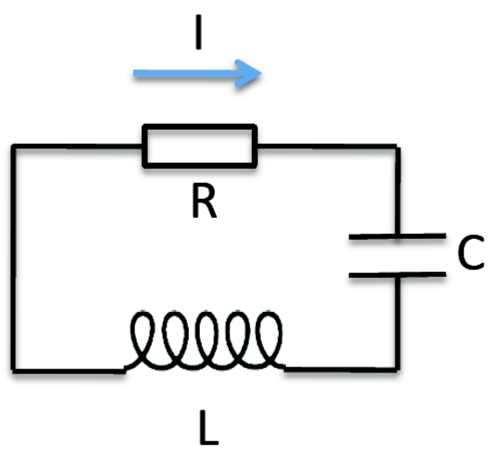

Abbildung 2: Schwingkreis mit Widerstand R, Kapazität C, Induktivität L

Die Lösung wird in der Übung besprochen.

4 Kräfte in elektrischen und magnetischen Feldern

Betrachtet man noch ein Mal die Kraft aus Gleichung 1, die auf ein Teilchen der Ladung q mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ in einem elektrischen Feld $\mathbf{E}$ und einem Magnetfeld $\mathbf{B}$ wirkt:

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Es sei hier angemerkt, dass, nur weil es sich um elektrodynamische Größen handelt, sich automatisch die Physik, die man bereits kennt, nicht von diesen Gleichungen entkoppelt. Für $v << c$ gilt hier immer noch, dass beispielsweise

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Auch gilt entgegen weitläufiger Meinungen immer noch der Energieerhaltungssatz.

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = I \cdot t \frac{\mathbf{L}}{t} \times \mathbf{B}$$

Wenn der Draht irgendwelche Kurven beschreibt, verwendet man diese Gleichung infinitesimal:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I \cdot \mathrm{dL} \times \mathrm{B}$$