Physik-Department

Ferienkurs zur Experimentalphysik 2 - Musterlösung

Daniel Jost

26/08/13

Technische Universität München

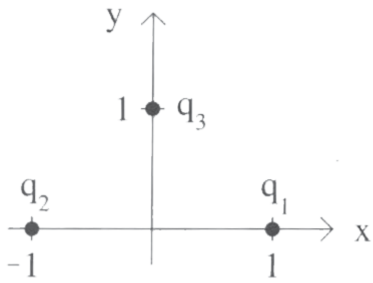

Abbildung 1: Punktladungen

1 Aufgaben zur Elektrostatik

Aufgabe 1

Gegeben seien drei Ladungen $q_1 = q$, $q_2 = -q$ und $q_3 = q$, die sich an den Punkten $\mathbf{r}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{r}_2 = (-1, 0)$ und $\mathbf{r}_3 = (0, 1)$ befinden und beweglich sind.

(a) Bestimmen Sie das Potential $V(\mathbf{r})$, das durch diese drei Ladungen erzeugt wird.

(b) Berechnen Sie die Kraft, die auf die Ladung q_1 ausgeübt wird.

Lösung zu Aufgabe 1

(a) Jede elektrische Ladung erzeugt ein elektrisches Feld, das sich mit den anderen zu einem Gesamtfeld linear überlagert. Das Integral ist durchlässig für lineare Operationen, weswegen für das Potential gilt

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + \frac{(-q)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} + \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_3|}\right]$$

(b) Die Lorentzkraft reduziert sich in der Elektrostatik auf $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, wobei für $\mathbf{E}$ gilt $\mathbf{E} = -\vec{\nabla}V$. Auf die Ladung q_1 wirkt die Kraft der Ladungen q_2 und q_3. Wieder gilt Superposition, weswegen

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(-q^2)}{4}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{q^2}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right] = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Zwölf identische Punktladungen $+q > 0$ sind äquidistant auf einem Kreis mit Radius R positioniert. Im Mittelpunkt des Kreises befindet sich eine Ladung $+Q > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Größe und Richtung der Kraft, die auf die Ladung $+Q$ wirkt.

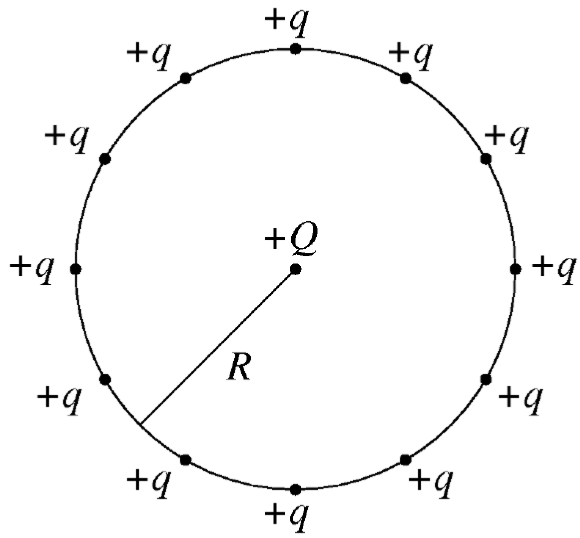

Abbildung 2: Anordnung der Ladungen

(b) Nun wird die Punktladung, die sich bei 3 Uhr befindet, entfernt. Geben Sie die Größe und Richtung der Kraft, die auf die Ladung $+Q$ wirkt, an.

Lösung zu Aufgabe 2

(a) Da die abstoßende Kraft, die die Ladung im Mittelpunkt von irgendeiner anderen Ladung auf dem Kreis spürt, identisch ist mit der abstoßenden Kraft der Ladung auf der Gegenseite, ist die Gesamtkraft im Mittelpunkt 0.

(b) Wenn diese Ladung entfernt wird, wird auch die Ladung auf der anderen Seite nicht mehr kompensiert, wodurch die Ladung im Mittelpunkt eine Kraft nach rechts mit dem Betrag

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2}$$

erfährt.

Aufgabe 3

(a) Betrachten Sie eine Ladung q, die im Ursprung sitzt. Bestimmen Sie mithilfe des Satzes von Gauß das elektrische Feld $\mathbf{E}$. Warum ist es ein sinnvoller Ansatz $\mathbf{E} = E \cdot \mathbf{e}_r$ zu wählen?

(b) Eine homogen geladene Kugel mit Radius R und der Gesamtladung q sitzt im Ursprung. Bestimmen Sie das elektrische Feld zunächst für $r > R$. Was stellen Sie im Hinblick auf die vorherige Aufgabe fest? Berechnen sie nun das elektrische Feld für $r < R$.

(c) Zwei konzentrische Kugeln mit Ladung $+q$ und $-q$ und den Radien R_1 und R_2 ($R_1 < R_2$) bilden einen Kugelkondensator. Berechnen Sie dessen Kapazität [**Sie können die Lösung der Teilaufgabe (a) recyceln**].

(d) Zeigen Sie:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

(Einzeiler)

Lösung zu Aufgabe 3

(a) Der Ansatz ist bereits angegeben mit

$$\mathbf{E} = E \cdot \mathbf{e}_r$$

Aus der entsprechenden Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

erhält man mittels Satz von Gauß

$$\int_K \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

einen Ausdruck für $E(r)$. Mit dem Ansatz kann man insbesondere ausnutzen, dass $\mathrm{d}\mathbf{A} \parallel \mathbf{e}_r$, also $\mathrm{d}A\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{d}A$ gilt.

$$\int_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_{\partial K} E \cdot \mathrm{d}A \cdot \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r = \int_{\partial K} E \cdot \mathrm{d}A$$

Man integriert über die Kugeloberfläche (K Kugelvolumen, ∂K Rand der Kugel).

$$\int_{\partial K} E \cdot \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta r^2 \cdot \sin\theta \cdot E(r)$$

Insgesamt erhält man

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} r^2 \cdot \sin\theta \cdot E(r) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

eingesetzt in den Ansatz liefert

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r$$

(b) Wieder Satz von Gauß. Für die linke Seite gilt jetzt, dass über eine gauß'sche Kugel integriert wird, deren Radius $r > R$ ist. Am Ergebnis aus (a) ändert sich also nichts auf der linken Seite. Für die Ladungsverteilung gilt formal:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{q}{4/3\pi R^3}, \ r \leq R \\ 0, \ \text{sonst} \end{cases}$$

Während auf der linken Seite der Maxwellgleichung mit dem Satz von Gauß integriert wird, wird die Ladungsverteilung über das gesamte Volumen integriert.

$$\int_K \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \mathrm{d}V = \int_0^{r>R} \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta r^2 \sin\theta \cdot \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

Für die Integration über den Radius muss der Sprung der Ladungsverteilung bei R berücksichtigt werden. Das bedeutet

$$\int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta r^2 \sin\theta \cdot \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} + \int_R^r \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta r^2 \sin\theta \cdot \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

Der zweite Summand verschwindet, weil die Ladungsverteilung in diesem Integrationsbereich Null ist. Für die innere Kugel erhält man das Ergebnis $\frac{q}{\epsilon_0}$, womit das Endergebnis exakt das Ergebnis aus (a) ist.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

Betrachtet man nun das elektrische Feld für $r < R$, so ändert sich die Integrationsgrenze des Radius auf der rechten Seite:

$$\int_0^r \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\theta} \mathrm{d}\theta r^2 \sin\theta \cdot \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{q}{4/3\pi R^3 \epsilon_0}$$

Der Ansatz für das elektrische Feld liefert schließlich

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot r \cdot \mathbf{e}_r$$

(c) Die Kapazität eines Kondensators ist

$$C = \frac{q}{U}$$

Dazu wird die Spannung U, also die Potentialdifferenz zwischen den beiden Kugeln benötigt. Per definitionem erhält man diese

$$U := -[\Phi(R_2) - \Phi(R_1)] = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Das elektrische Feld ist bereits aus der vorherigen Aufgabe bekannt. Zudem gilt $\mathbf{dr} \parallel \mathbf{e}_r$. Einsetzen liefert

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

womit sich für die Kapazität

$$C = \frac{q}{q/4\pi\epsilon_0}\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\epsilon_0\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

(d) Es handelt sich tatsächlich um einen Einzeiler:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = q \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{E} = \mathbf{r} \times (q\mathbf{E}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Aufgabe 4

Betrachten Sie einen Plattenkondensator mit Fläche $A = L \cdot a$, dessen Platten den Abstand d besitzen und die Ladung Q tragen.

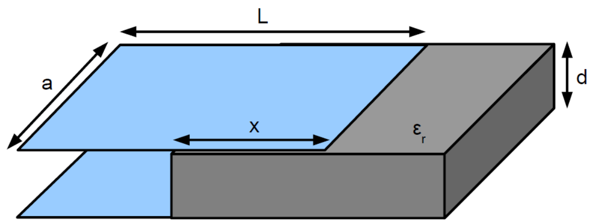

Abbildung 3: Dielektrikum in Plattenkondensator

(a) Berechnen Sie die Kapazität dieses Kondensators via Satz von Gauß zunächst ohne Berücksichtigung des Dielektrikums. Argumentieren Sie über den Satz von Gauß, warum nur die Plattenflächen bei der Gauß'schen Box berücksichtigt werden müssen. **Hinweis: Betrachten Sie die E-Felder der Kondensatorplatten zunächst getrennt und berücksichtigen Sie dann die Superposition.**

(b) Nun wird wie in Abbildung 3 gezeigt, ein Dielektrikum mit relativer Dielektrizitätskonstante ϵ_r in den Kondensator geschoben. Berechnen Sie die Kapazität des Kondensators in Abhängigkeit von x. Sie dürfen alle bekannte Formeln recyceln.

Lösung zu Aufgabe 4

(a) Zur Berechnung benötigt man die Spannung, also überlegt man sich zunächst, in welche Richtung das elektrische Feld zeigt. Wenn man die z-Achse senkrecht auf die Kondensatorplatten stellt, gilt $\mathbf{E} = E \cdot \mathbf{e}_z$. Mit dem Satz von Gauß erhält man das $\mathbf{E}$-Feld, das von der positiv geladenen Kondensatorplatte erzeugt wird.

$$\int_{\partial V = A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Es gilt $\mathrm{d}\mathbf{A} \parallel \mathbf{e}_z \rightarrow \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_z = \mathrm{d}A$. Also:

$$2 \cdot aL \cdot E = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{2 \cdot aL\epsilon_0}$$

Für die zweite Kondensatorplatte kann man eine ähnliche Überlegung anstellen, findet aber letztlich, dass der Betrach E' des zweiten Feldes gerade E ist. Insgesamt ergibt sich für das elektrische Feld:

$$E_{ges} = E + E' = \frac{Q}{2 \cdot aL\epsilon_0}$$

Bei der Gauß'schen Box wird nur die Oberfläche berücksichtigt. Relevant für das elektrisch eFeld sind aber nur die Flächen, bei denen das Produkt $\mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_z \neq 0$ ist, also nur die Normalenvektoren auf den Kondensatoroberflächen, nicht auf den Seiten der Box. Diese stehen senkrecht auf dem elektrischen Feld, womit das Skalarprodukt Null ist und sie keinen Beitrag liefern. Für die Spannung gilt

$$U = \int_0^d E \cdot \mathrm{d}z = \frac{Q}{aL\epsilon_0} \cdot d$$

und somit für die Kapazität

$$C = \frac{aL\epsilon_0}{d} = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

(b) In diesem Fall handelt es sich wie in der Vorlesung besprochen um die Parallelschaltung zweier Kondensatoren, also gilt für die Kapazität

$$C = C_0 + C_D$$

C_0 ist fast das Ergebnis aus der vorherigen Aufgabe. Es ändert sich nur die Fläche:

$$C_0 = \frac{a(L-x)\epsilon_0}{d}$$

Für C_D muss man ϵ_r berücksichtigen.

$$C_D = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{xa}{d}$$

Insgesamt also

$$C = \frac{\epsilon_0 a}{d} \cdot (L - x + \epsilon_r x)$$

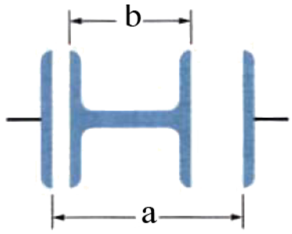

Abbildung 4: Aufbau zu Aufgabe 4

Aufgabe 5

Die Abbildung zeigt zwei in Reihe geschaltete Kondensatoren. Das mittlere Bauteil der Länge b ist in horizontaler Richtung beweglich.

(a) Berechnen Sie die Gesamtkapazität C der Anordnung.

(b) Wie hängt C von der horizontalen Position des mittleren Bauteils ab?

(c) Wie ändert sich die Gesamtkapazität, wenn die Anordnung in Öl getaucht wird, das eine Dielektrizitätskonstante κ hat?

Lösung zu Aufgabe 5

(a) Es handelt sich um eine Reihenschaltung von zwei Kondensatoren, mit den Plattenabständen d_1 und d_2. Damit gilt

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$d_1 = a - b - d_2$$

Entsprechende Gleichungen erhält man für d_2. Damit ergibt sich

$$\frac{1}{C} = \frac{d_1 + d_2}{\epsilon_0 A} = \frac{a-b}{\epsilon_0 A}$$

(b) C hängt nicht von der vertikalen Position ab.

(c) $C' = \kappa C$

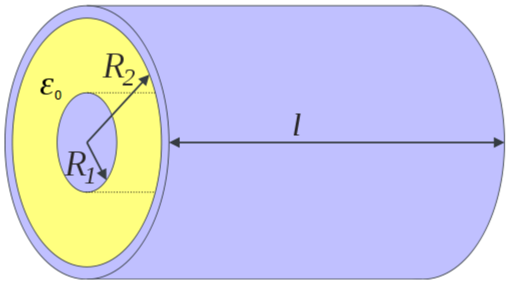

Abbildung 5: Zylinderkondensator

Aufgabe 6

Betrachten Sie einen Zylinderkondensator wie in Abbildung 5. Berechnen Sie dessen Kapazität, davon ausgehend, dass er die Ladung Q trage. Wie groß ist die Kapazität, wenn der Zwischenraum mit einem Dielektrikum ϵ_r gefüllt ist?

Lösung zu Aufgabe 6

Wieder wie in den vorherigen Aufgaben: Berechnung des elektrischen Felds zwischen den beiden Zylindern. Der Ansatz ist dieses mal $\mathbf{E} = E \cdot \mathbf{e}_r$. Für den Satz von Gauß betrachtet man wieder nur die Oberfläche des Zylinders, wobei die Deckel jeweils keinen Beitrag liefern (senkrecht zum **E**-Feld). Also:

$$\int_{\partial Z} E \cdot \mathrm{d}A = 2\pi r l \cdot E = \frac{Q}{\epsilon_0} \to E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l}$$

Die Spannung zwischen äußerem und innerem Zylinder wie gewohnt

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E\mathrm{d}r = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l}\mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\left[\ln r\right]_{R_1}^{R_2}$$

Für die Kapazität folgt:

$$C = 2\pi l \epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie den Energiegehalt eines Plattenkondensators mit Plattenabstand d

(a) indem Sie annehmen, dass der Kondensator zunächst ungeladen ist und die Ladungen von der einen Seite der Platte mittels anliegender Spannung U auf die andere gebracht werden, bis die Ladung des Kondensators Q beträgt.

(b) indem Sie annehmen, dass der Kondensator mit der Ladung Q geladen ist und Sie die Energie des elekrischen Felds des Kondensators bestimmen.

Lösung zu Aufgabe 7

(a) Jede Ladung, die übertragen wird, entspricht der Energie $\mathrm{d}W_{pot} = U \cdot \mathrm{d}q$. Insgesamt ergibt sich daher

$$W_{pot} = \int_0^Q U \cdot \mathrm{d}q = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2$$

(b) Für das elektrische Feld in einem Plattenkondensator gilt als Zusammenhang mit der Spannung

$$U = \int_0^d E\mathrm{d}x = E \cdot d$$

anders geschrieben

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U \cdot C}{\epsilon_0 \cdot A}$$

Für die Energiedichte gilt

$$w_{el} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2}\frac{U^2C^2}{\epsilon_0^2 \cdot A^2}$$

Die gespeicherte Energie ist

$$\int \mathrm{d}V \cdot w_{el} = A \cdot d \cdot w_{el} = \frac{1}{2}\frac{U^2C^2}{\epsilon_0 \cdot A}d = \frac{1}{2}CU^2$$

Aufgabe 8

Es sei ein Spannungsnetzwerk wie in Abbildung 6 gegeben. Bestimmen Sie das Potential am Punkt P für $U_1 = 6$ V, $U_2 = 4$ V, $R = 10\ \Omega$.

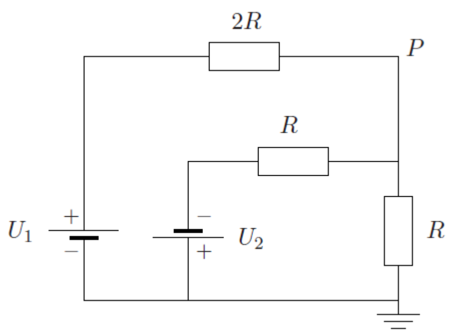

Abbildung 6: Spannungsnetzwerk

Lösung zu Aufgabe 8

Zunächst werden die Stromrichtungen durch die Widerstände festgelegt. Hierzu Abbildung 6. Der Punkt, an dem das Potential berechnet werden soll, befindet sich hinter dem ersten Widerstand und vor dem ersten Knoten. Deshalb ist das Potential an diesem Punkt

$$U_P = U_1 - 2 \cdot R \cdot I_1$$

also der durch den Widerstand $2R$ hervorgerufenen Spannungsabfall. Die unbekannte

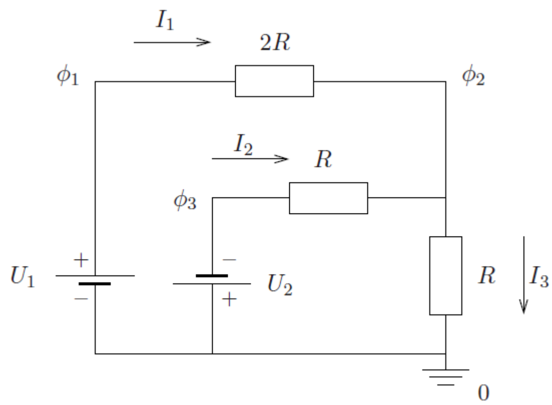

Abbildung 7: Spannungsnetzwerk Lösung

Größe ist I_1. Dazu stellt man ein Gleichungssystem mithilfe der Kirchhoffschen Regeln auf.

$$U_1 - 2RI_1 - RI_3 = 0 \tag{1}$$

$$-U_2 - RI_2 - RI_3 = 0 \tag{2}$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \tag{3}$$

Beispielsweise Gleichung 3 nach I_3 auflösen und in Gleichungen 1, 2 einsetzen.

$$U_1 - 3RI_1 - RI_2 = 0 \tag{4}$$

$$-U_2 - 2RI_2 - RI_1 = 0 \tag{5}$$

Jetzt nach $2RI_1$ auflösen und in die Gleichung für den Punkt P einsetzen liefert:

$$U_P = U_1 - \frac{2}{5}(2U_1 + U_2) = -0.4 \text{ V}$$

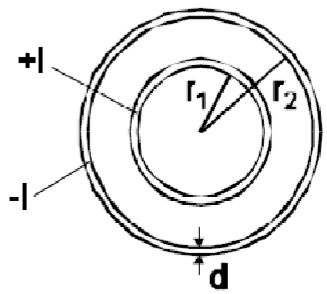

Abbildung 8: Konzentrische Leiter

Aufgabe 9

Betrachten Sie zwei konzentrische Leiter, die wie in Abbildung 8 angeordnet sind und in entgegengesetzter Richtung vom Strom I durchflossen werden. Bestimmen Sie den Betrag der Stromdichte j in den Bereichen $0 < r < \infty$.

Lösung zu Aufgabe 9

Mit Verwendung von

$$I = \int_A \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

kann man die entsprechenden Bereiche bestimmen. für $r < r_1$ ist die Stromdichte Null (es fließt kein Strom). Für das innere Rohr lässt sich berechnen, dass

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{r_1}^{r_1+d} \mathrm{d}r \cdot r \cdot j = 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r_1}^{r_1+d} \cdot j = \pi \left[(r_1+d)^2 - r_1^2\right] \cdot j$$

Nach der Stromdichte auflösen, ergibt

$$j = \frac{I}{\pi \left[(r_1+d)^2 - r_1^2\right]}$$

Analoge Argumentation für das äußere Rohr.

$$j = \frac{I}{\pi \left[(r_2+d)^2 - r_2^2\right]}$$

Aufgabe 10

Gegeben sei ein zylinderförmiger ohmscher Leiter mit dem Radius R und der Länge L. An diesen ist über die ideal leitende Deck- und Bodenfläche eine Spannungsquelle der Spannung U angeschlossen (vgl. Abbildung 9). Im Leiter verteilt fließt der elektrische Strom entgegen der z-Richtung. Der Betrag der Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -j(r) \cdot \mathbf{e}_z$ im Leiter lautet in Zylinderkoordinaten $j(r) = j_0(2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2)$.

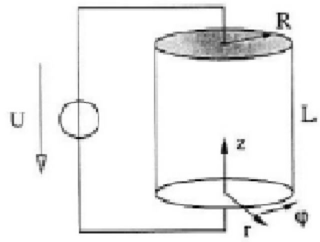

Abbildung 9: Zylinderförmiger ohmscher Leiter

(a) Das elektrische Feld im Inneren des Zylinders sei konstant. Bestimmen Sie die Richtung von E.

(b) Berechnen Sie den Strom I, der durch die gesamte Anordnung fließt.

(c) Wie groß ist die im Leiter abfallende Leistung P?

(d) Berechnen Sie Beitrag und Richtung der Driftgeschwindigkeit.

Lösung zu Aufgabe 10

(a) Aus

$$U = \int \mathbf{E} \mathrm{d}\mathbf{s}$$

folgt, dass das elektrische Feld in negative z-Richtung zeigen muss, also $\mathbf{E} = -E \cdot \mathbf{e}_z$.

(b) Wieder wie in der vorherigen Aufgabe, erhält man unter Berücksichtigung der r-Abhängigkeit der Stromdichte:

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}r \cdot r \cdot j(r) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}r \cdot r \cdot j_0 \cdot \left(2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

Auswertung des Integrals liefert

$$I = \frac{3\pi R^2}{2} \cdot j_0$$

(c) Die Leistung ist

$$P = U \cdot I = U \cdot \frac{3\pi R^2}{2} \cdot j_0$$

(d)

$$\mathbf{v}_D = \frac{e\tau_s}{m_e} \cdot \mathbf{E} = -\frac{e\tau_s}{m_e} \cdot E \cdot \mathbf{e}_z$$