

Physik-Department

# Ferienkurs zur Experimentalphysik

Daniel Jost

26/08/13



TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Die Maxwellgleichungen im Vakuum</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>5</b>
4.1	Gleichungen der Elektrostatik . . . . .	5
4.2	Das elektrostatische Potential . . . . .	6
4.3	Der elektrische Dipol . . . . .	7
4.4	Der Kondensator . . . . .	7
4.5	Dielektrika zwischen Kondensatorplatten . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Der elektrische Strom</b>	<b>10</b>
5.1	Der elektrische Widerstand und das Ohmsche Gesetz . . . . .	11
5.2	Die Stromleistung . . . . .	12
5.3	Die Kirchhoffschen Regeln . . . . .	12

## 1 Einleitung

Dieser Ferienkurs ist darauf ausgelegt den Stoff aus der Vorlesung Experimentalphysik 2 für Physiker zur Vorbereitung auf die Zweitklausur zu wiederholen. Dabei geht es insbesondere darum den so genannten Aha-Effekt zu provozieren, der für die Vorbereitung auf die Erstklausur fehlte. Es ist daher unumgänglich die zum Skript zugehörigen Aufgaben zu bearbeiten, wobei für die Hilfestellung der Grundsatz gelten sollte: So viel Hilfe als nötig und so wenig Hilfe als möglich. Es empfiehlt sich die Vorbereitung in Kleingruppen mit einer Maximalgröße von vier Teilnehmern.

## 2 Mathematische Grundlagen

Für die Elektrodynamik sind bestimmte mathematische Werkzeuge unabdingbar. Es erfolgt in diesem Abschnitt zunächst eine knappe Einführung in die wichtigsten Konzepte.

**Definition 2.1.** Ein **Vektorfeld**  $\mathbf{F}$  ordnet jedem Punkt  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  einen Vektor  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^3$  im Raum zu, also

$$\mathbf{F} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{r} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

**Definition 2.2.** Ein **Skalarfeld**  $\Phi$  ordnet jedem Punkt  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  im Raum ein Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  zu.

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{r} \mapsto \Phi(\mathbf{r}) = \lambda \end{cases}$$

Die Temperatur innerhalb eines Raumes kann durch ein Skalarfeld beschrieben werden. Im Gegensatz zum Vektorfeld wird jedem Punkt im Raum eine Zahl (Temperaturwert) zugeordnet.

**Definition 2.3.** Der **Nablaoperator** in drei Dimensionen ist definiert als

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

und ist ein Vektor, dessen Einträge die partiellen Richtungsableitungen enthalten.

Für den Zweck dieses Ferienkurses ist diese Definition zunächst ausreichend. Es sei angemerkt, dass die Verallgemeinerung auf  $n$  Dimensionen für die klassische Elektrodynamik nicht notwendig ist.

**Definition 2.4.** Sei  $\Phi$  ein skalares Feld, dann ist

$$\mathbf{grad} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Phi(\mathbf{r}) \mapsto \vec{\nabla}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \end{cases}$$

der **Gradient** des Skalarfeldes  $\Phi$ .

Der Gradient eines Skalarfeldes liefert offensichtlich ein Vektorfeld. Dieses Vektorfeld quantifiziert die Änderungsrate sowie die Richtung der größten Änderung des Skalarfeldes. Beispiel: Die Temperaturverteilung in einem Raum kann durch ein Skalarfeld angegeben werden. Der Gradient dieses Skalarfeldes zeigt in jedem Punkt im Raum in die Richtung, in der die größte Temperatur festzustellen ist. Die Änderungsrate gibt an, wie stark sich die Temperatur in Richtung dieses Punktes ändert.

**Definition 2.5.** Sei  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Vektorfeld. Dann nennt man

$$\mathbf{div} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{cases}$$

die **Divergenz** des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$ .

Zur Veranschaulichung ein Beispiel: Gegeben sei ein Vektorfeld, das die Windgeschwindigkeit beschreibt. Falls sich die Luft in einem bestimmten Gebiet erhitzt, wird das Vektorfeld von diesem Punkt wegzeigen, da die Luft expandiert. Die Divergenz des Vektorfeldes in diesem Punkt ist dann ein positiver Skalar, weil das Gebiet eine Quelle heißer Luft ist. Kühlt sich die Luft hingegen in einem Gebiet ab, so kontrahiert sie und das Vektorfeld wird zu diesem Punkt zeigen. Die Divergenz ist in diesem Fall negativ. Ist die Divergenz eines Vektorfeldes an jeder Stelle Null, dann ist es quellen- und senkenfrei.

**Definition 2.6.** Sei  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Vektorfeld. Dann nennt man

$$\text{rot} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \end{cases}$$

die **Rotation** des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$ .

Wenn die Rotation eines Vektorfeldes verschwindet, so nennt man dieses Vektorfeld **konservativ**. Unter diesen Umständen findet man ein Potential  $\Phi$ , für das gilt

$$\vec{\nabla} \Phi = -\mathbf{E} \quad (1)$$

**Definition 2.7.** Sei  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Vektorfeld,  $V \subset \mathbb{R}^3$  eine dreidimensionale Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ . Dann gilt:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, dV = \oint_{A=\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (2)$$

**(Satz von Gauß)**

In Worten sagt der Satz von Gauß, dass der Fluss durch eine geschlossene Oberfläche der Summe der Quellen und Senken innerhalb der Oberfläche entspricht<sup>1</sup>. Zunächst wird über ein Volumen integriert, das man Gaußvolumen nennt. Die Divergenz im Integranden wandelt das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral, gerade die Oberfläche des angegeben Volumens, um. Prinzipiell lässt sich der Satz auf jedes beliebige Volumen anwenden, kann dabei aber beliebig kompliziert werden. Im Zusammenhang mit der Elektrostatik, in der der Satz im Rahmen dieses Ferienkurses am meisten Bedeutung haben wird, sind drei Geometrien akzeptable Anordnungen: kugelsymmetrische, zylindrische und planparallele Probleme. Sie sind alle in irgendeiner Art symmetrisch und vereinfachen damit die Berechnungen immens.

**Definition 2.8.** Sei  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Vektorfeld,  $A \subset \mathbb{R}^3$  eine zweidimensionale Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ . Dann gilt:

$$\int_A \vec{\nabla} \times \mathbf{F} \, d\mathbf{A} = \oint_{\partial A} \mathbf{F} \, ds \quad (3)$$

**(Satz von Stokes)**

<sup>1</sup>An dieser Stelle sei auf Walter Lewin verwiesen <http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-02-electricity-and-magnetism-spring-2002/video-lectures/lecture-3-electric-flux-and-gauss-law/>, der einen sehr anschaulichen Einstieg für die Verwendung des Satzes von Gauß in der Elektrodynamik liefert.

### 3 Die Maxwellgleichungen im Vakuum

Im Gegensatz zur Vorlesung wird in diesem Ferienkurs Während in der Vorlesung die Herleitung der Maxwellgleichungen zunächst über die Bestimmung der Coloumbkraft zur Definition eines elektrischen Feldes und den Feldgleichungen der Elektrostatik führt usw.<sup>2</sup>, überlegen wir uns vom vollständigen Satz der Maxwellgleichungen, die wir als „vom Himmel gefallen“ betrachten wollen, zunächst die statischen Fälle. Diese deduktive Herangehensweise soll einer größeren Übersichtlichkeit dienen.

**Definition 3.1.** Die Maxwellgleichungen im Vakuum lauten

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

Die Konstanten  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  sind mit der Lichtgeschwindigkeit durch  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$  verknüpft. Die Größe  $\mathbf{j}$  ist die Stromdichte,  $\rho$  die Raumladungsdichte. Zusätzlich zu diesen vier elementaren Grundgleichungen der Elektrodynamik gilt für die Kraft, die auf ein Teilchen der Ladung  $q$  in einem elektromagnetischen Feld wirkt,

$$\mathbf{F} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4)$$

Die Kontinuitätsgleichung ist eine weitere Folgerung aus den Maxwellgleichungen, die man erhält, wenn man die vierte Gleichung von links mit dem grad multipliziert.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (5)$$

Diese sechs Gleichungen bilden die Grundlage der klassischen Elektrodynamik. Anfänglich interessant sind die stationären Fälle, also die Elektro- und Magnetostatik. Die Maxwellgleichungen sind lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Lösungen dieser Differentialgleichungen, also die elektrischen und magnetischen Feldern, unterliegen daher dem Superpositionsprinzip. Das gilt auch für alle linearen Zusammenhänge zwischen diesen Lösungen und anderen Größen.

<sup>2</sup>Diese klassische Betrachtung in der Experimentalphysik ist historisch motiviert und folgt den Entdeckungen Michael Faradays, André Marie Ampère und anderen.

## 4 Elektrostatik

### 4.1 Gleichungen der Elektrostatik

Betrachtet man in Definition 3.1 die Fälle, in denen die Ladungsdichte sowie die Stromdichte zeitlich konstant sind, also  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) \Rightarrow \partial\rho/\partial t = 0$  und  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ , entkoppeln sich elektrisches und magnetisches Feld, da deren Zeitableitungen verschwinden, und man erhält die Feldgleichungen der entsprechenden statischen Spezialfälle. Für die Elektrostatik also insbesondere:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = \vec{0} \quad (6)$$

In der Übung wird gezeigt werden, dass das elektrische Feld, das von einer Ladung  $q$  im Ursprung verursacht und nach Gleichung 6 der Differentialgleichung

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (7)$$

gehört, mit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot \mathbf{e}_r \quad (8)$$

als Lösung der Differentialgleichung bestimmt ist. Dieses Resultat ergibt sich durch geschickte Wahl des Gaußvolumens und der Anwendung des Satzes von Gauß in Gleichung 7. Für die rechte Seite erhält man dann  $\int_V \rho/\epsilon_0 dV = q/\epsilon_0$ . Der Satz von Gauß liefert bereits einen Ausdruck für den Fluss durch eine Oberfläche. Man definiert im Zusammenhang mit elektrischen Feldern den **elektrischen Fluss**

$$\Phi_{el} = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (9)$$

Aus Gleichung 8 ergibt sich dann die Coulombkraft für zwei Punktladung  $q_1, q_2$  im Abstand  $r$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q_1 \cdot \mathbf{E}(q_2, \mathbf{r}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

Diese heuristische Herleitung folgt der Argumentation aus der klassischen Mechanik <sup>3</sup>. Ferner gilt für die Coulombkraft das **Superpositionsprinzip**, das sich, wie bereits im vorherigen Abschnitt beschrieben, aus der Linearität der Maxwellgleichungen ergibt. Es gilt für das Gesamtfeld  $\mathbf{E}$  am Punkt  $\mathbf{R}$ , das von  $n$  Ladungen erzeugt wird, also

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}_k = \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_k|^3} \quad (10)$$

<sup>3</sup> $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = G \cdot \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r \Rightarrow \mathbf{g} = G \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r$

## 4.2 Das elektrostatische Potential

Nach Gleichung 6 ist die Rotation des  $\mathbf{E}$ -Feldes Null. Das heißt nach dem im ersten Kapitel formulierten mathematischen Formalismus, dass ein Potential mit

$$\vec{\nabla}\Phi = -\mathbf{E} \quad (11)$$

existiert. Einsetzen in die Feldgleichung liefert die **Poissongleichung**

$$\vec{\nabla}^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (12)$$

mit der aus einer beliebigen Ladungsverteilung  $\rho$  das zugehörige Potential rekonstruiert werden kann. Für die Punktladung im Ursprung erhält man also mit Gleichung 8 und dem Ansatz  $\mathbf{E} = E \cdot \mathbf{e}_r$

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = -\int E \, dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (13)$$

Das Potential fällt mit  $1/r$  in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  zwischen Beobachter und Ladung. Befindet sich die Punktladung am Ort  $\mathbf{r}_i$  schreibt man also

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (14)$$

Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten

$$U := \Phi(\mathbf{R}_1) - \Phi(\mathbf{R}_2) = \int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \quad (15)$$

wird **Spannung** genannt. Analog zur klassischen Mechanik, kann man mit dem elektrostatischen Potential die potentielle Energie berechnen, die eine Probeladung  $q$  am Punkt  $\mathbf{r}$  besitzt

$$dW_{pot} = \Phi \cdot dq \quad (16)$$

bzw. bei von  $q$  unabhängigem Potential:

$$W_{pot} = q \cdot \Phi \quad (17)$$



## 4.3 Der elektrische Dipol

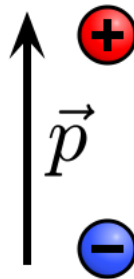


Abbildung 1: Elektrischer Dipol

**Definition 4.1.** Das **elektrische Dipolmoment**  $\mathbf{p}$  ist eine Größe für die Trennung von positiven und negativen Ladungen. In der Elektrostatik gilt für zwei Ladungen  $+q$  und  $-q$

$$\mathbf{p} = q \cdot \mathbf{r}$$

wobei  $\mathbf{r}$  der Verbindungsvektor zwischen den beiden elektrischen Ladungen von  $-q$  nach  $+q$  ist.

Das Drehmoment in einem extern applizierten elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  ist

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (18)$$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung  $\rho$  ist das Dipolmoment  $\mathbf{p}$  am Ort  $\mathbf{r}$  das Volumenintegral

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot d^3\mathbf{r}' \quad (19)$$

Liegt eine Ladungsverteilung von  $N$  Punktladungen mit der Ladung  $q$  vor, so ist  $\rho$

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_i^N q_i \cdot \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)$$

eingesetzt in Gleichung 19

$$\mathbf{p} = \sum_i^N q_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \quad (20)$$

## 4.4 Der Kondensator

In der Elektrostatik begegnet man sehr häufig Problemen mit Kondensatoren. Zunächst handelt es sich dabei um zwei entgegengesetzt geladene Leiterplatten, die in der

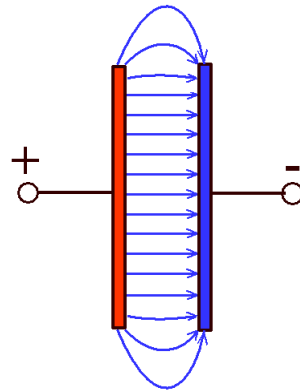


Abbildung 2: Bsp.: Plattenkondensator

Lage sind, Ladungen zu speichern. Auch wenn man sehr häufig Plattenkondensatoren begegnet, ist die Geometrie der „Platten“ nicht darauf beschränkt. Der Zusammenhang zwischen diesen Größen kann durch die **elektrische Kapazität**<sup>4</sup>

$$C = \frac{Q}{U} \quad (21)$$

ausgedrückt werden. Ein sehr einfacher und häufig behandelter Fall ist der Plattenkondensator. An eine Spannungsquelle werden zwei parallel ausgerichtete Platten mit dem Abstand  $d$  der Fläche  $A$  angeschlossen. Die Kapazität ergibt sich zu

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (22)$$

Dieses Ergebnis wird in der Übung anhand eines Beispiels mittels Satz von Gauß berechnet. Für die Kapazität  $C$  von Kondensatoren gilt insbesondere in **Parallelschaltung**

$$C = \sum_k C_k$$

und in **Reihenschaltung**

$$\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}$$

Die Energie, die im elektrischen Feld zwischen den Kondensatorplatten gespeichert ist, kann man berechnen, indem man sich überlegt, wie groß die Arbeit ist, die man

<sup>4</sup>Kapazität von lat. *capacitas* = Fassungsvermögen

benötigt, um die Ladung einer Platte vollständig zu entnehmen, also mit 16

$$dW = U \cdot dQ$$

Einsetzen von 21 liefert

$$W = \int_0^Q \frac{Q'}{C} dQ' = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU \quad (23)$$

Für die Energiedichte des elektrischen Feldes teilt man die Energie durch das Volumen des Kondensators. Das Ergebnis ist i. A.

$$w_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \quad (24)$$

#### 4.5 Dielektrika zwischen Kondensatorplatten

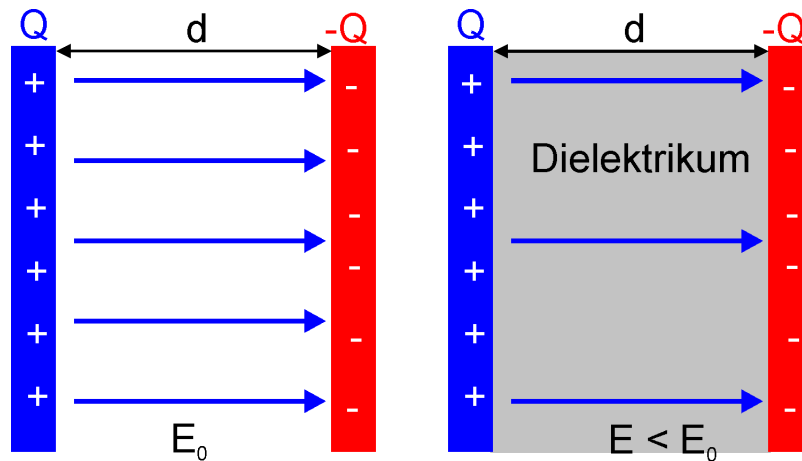


Abbildung 3: Dielektrika

Ein Dielektrikum ist ein Material, das elektrisch nichtleitend ist, das heißt, ein Material, bei dem potentielle Ladungsträger (Elektronen) an die Atomrümpfe stark gebunden sind und sich nicht innerhalb des Dielektrikums frei bewegen können. Was passiert nun aber mit dem elektrischen Feld? Nach 4 übt es eine Kraft auf die Elektronen aus. Da sie sich aber nicht hinreichend frei bewegen können, werden sie sich innerhalb des Atoms vermehrt auf einer Seite aufhalten, es bilden sich kleine Dipole innerhalb des Dielektrikums, (betrachte Abbildung 3), die sich energetisch günstig ausrichten. Dadurch wird ein elektrisches Feld induziert, das dem angelegten äußeren Feld entgegengesetzt ist. Das Feld im Dielektrikum  $E_D$  reduziert das äußere Feld  $E_0$ . Durch einigen (großen) Rechenaufwand findet man schließlich, dass das elektrische Feld um

$$\mathbf{E}_D = \epsilon_r \cdot \mathbf{E}_0$$

reduziert wird. Die materialspezifische Konstante  $\epsilon_r \geq 1$  ist die **relative Dielektrizitätskonstante** oder **dielektrische Leitfähigkeit**. Das Gleichheitszeichen gilt im Vakuum. Die Kapazität eines Kondensators ändert sich um

$$C = \epsilon_r \frac{Q}{U} \quad (25)$$

Falls man mehrere Dielektrika parallel in einen Kondensator schiebt, verhält sich der Kondensator, als schaltete man mehrere Kondensatoren mit je einem Dielektrikum parallel. Für die Reihenschaltung von einigen Dielektrika in einem Kondensator, ist die Kapazität gerade, als schaltete man entsprechend viele Kondensatoren mit je einem Dielektrikum in Reihe.

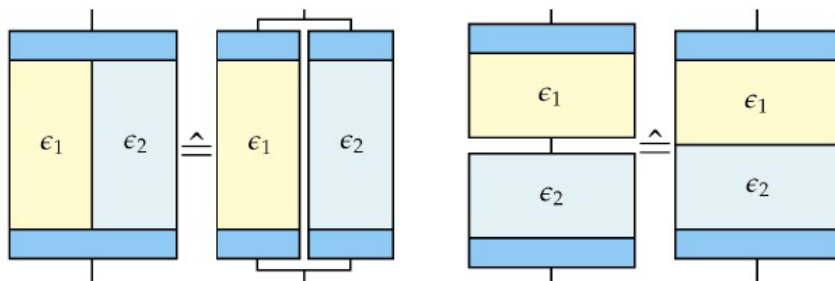


Abbildung 4: Dielektrika parallel und in Reihe geschaltet

## 5 Der elektrische Strom

**Definition 5.1.** Der **elektrische Strom** entspricht der Anzahl geladener Teilchen pro Zeiteinheit.

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (26)$$

Darüber hinaus formuliert man die Stromdichte, die gegeben ist als

$$\mathbf{j} = n \cdot q \cdot \mathbf{v}_D \quad (27)$$

mit der Teilchendichte  $n$  der Ladungsträger, der Ladung  $q$  und der Driftgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_D$ . Die Stromdichte bezeichnet den Strom, der durch eine Querschnittsflächeneinheit senkrecht zu  $\mathbf{j}$  fließt. Für den Gesamtstrom durch eine geschlossene Oberfläche findet man dann

$$I = \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} \quad (28)$$

Beispiel: Ein Leiter mit kreisförmigem Querschnitt, Innenradius  $r$  und der Stromdichte  $\mathbf{j} = j \cdot \mathbf{e}_n$ , wobei  $\mathbf{e}_n$  der Einheitsvektor senkrecht auf der Querschnittsfläche ist, durchfließt der Strom

$$I = \int_A \mathbf{j} \, d\mathbf{A} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r dr \cdot r j = 2\pi \frac{r^2}{2} j = \pi r^2 j \quad (29)$$

Das Integral wird also über die gesamte Querschnittsfläche berechnet. Interessiert man sich nur für die Stromstärke in einem Teilbereich und nicht im gesamten Leiter, so passt man die Integrationsgrenzen entsprechend an. Die Leitergeometrie ist bei den meisten Aufgaben so simpel, dass man sich für gewöhnlich keine großen Gedanken um den Normalenvektor machen muss, sprich wie  $d\mathbf{A}$  und  $\mathbf{j}$  zueinander stehen.

### 5.1 Der elektrische Widerstand und das Ohmsche Gesetz

Betrachtet man Ladungsträger, die sich durch einen Leiter bewegen, so besitzen sie aufgrund thermischer Energie bereits eine Geschwindigkeit, was eigentlich dafür spräche, dass damit auch eine Stromdichte einherginge. Jedoch kommt es über die Zeit zu Stößen zwischen den Ladungsträgern, sodass die mittlere Geschwindigkeit gleich Null ist. Durch das Anlegen einer Spannung, also eines elektrischen Feldes, werden die Ladungsträger hingegen gleichmäßig in eine Richtung beschleunigt-, wobei sie nach einer Zeit  $\tau_s$  mit einem Ladungsträger kollidieren, abgebremst und wieder beschleunigt werden. Die Geschwindigkeit zuckelt gewissermaßen hin und her und die Ladungsträger driften durch den Leiter (vgl. Abbildung 5).

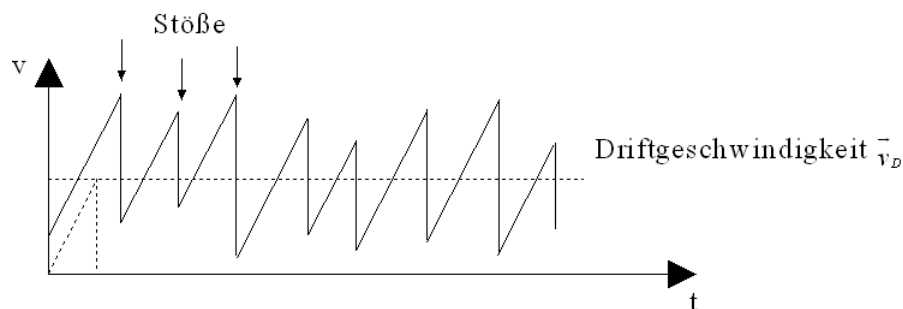


Abbildung 5: Driftgeschwindigkeit bei Anlegen eines äußeren Feldes

Es gilt also

$$m\mathbf{a} = q \cdot \mathbf{E} \Rightarrow m\mathbf{a} = q \cdot \mathbf{E}$$

und mit einmaliger Integration sowie Auswertung zum Zeitpunkt  $t = \tau_s$

$$\mathbf{v}_D = \frac{q \cdot \mathbf{E}}{m} \tau_s$$

Für die Stromdichte gilt demnach

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v}_D = \frac{nq^2\tau_s}{m}\mathbf{E} = \sigma_{el} \cdot \mathbf{E} \quad (30)$$

wobei  $\sigma_{el} = nq^2\tau_s/m$  identifiziert wird als die materialspezifische elektrische Leitfähigkeit. Betrachtet man nun einen homogenen Leiter mit dem Querschnitt  $A$  und der Länge  $L$ , so findet man

$$U = \int EdL = E \cdot L$$

und für den Strom

$$I = \int \mathbf{j}d\mathbf{A} = j \cdot A$$

Zusammenfassend also gerade das Ohmsche Gesetz in bekannter Form

$$U = R \cdot I \quad (31)$$

mit  $R = \frac{L}{\sigma_{el}A}$ . Für Widerstände, die hintereinander oder nebeneinander geschaltet werden, ergeben sich ähnliche Rechenregeln wie beim Kondensator. Für die **Reihenschaltung** findet man

$$R = \sum_k R_k$$

und für die Parallelschaltung

$$\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}$$

## 5.2 Die Stromleistung

Beim Transport von elektrischen Ladungen wird nach

$$W = q(\Phi(R_1) - \Phi(R_2)) = q \cdot U$$

Arbeit verrichtet. Die elektrische Leistung ist bei konstanten  $U$  und  $I$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(Q \cdot U) = U \cdot \frac{dQ}{dt} = U \cdot I \quad (32)$$

## 5.3 Die Kirchhoffschen Regeln

Zur Berechnung von Strömen und Spannungen in einem Spannungsnetzwerk, verwendet man die Kirchhoffschen Regeln.

**1. Die Maschenregel** besagt, dass die Summe aller Spannungen im gesamten Stromkreis und insbesondere in jeder Masche gleich Null sein muss.

$$\sum_k U_k = 0 \quad (33)$$

**2. Die Knotenregel:** Die Summe der einlaufenden Ströme in einen Knoten muss gleich der Summe der auslaufenden Ströme sein.

$$\sum_k I_k = 0 \quad (34)$$

Nützlich sind noch folgende Zusatzregeln

- (a) Spannungsquellen werden von  $\oplus$  nach  $\ominus$  positiv gezählt.
- (b) Widerstände, die in Stromrichtung durchlaufen werden, werden als Spannungsabfall betrachtet und somit negativ gezählt.

## Literatur

- [1] **The Feynman Lectures on Physics - Feynman/Leighton/Sands**
- [2] **Experimentalphysik 2 - Wolfgang Demtröder**