....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Σ		

I .... Erstkorrektur

II .... Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

Prof. Dr. M. Wolf

6. August 2013, 15:00 – 16:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **6** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **66 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Metrische Räume** **[10 Punkte]**

Sei M ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, heißt *lokal beschränkt*, wenn es zu jedem $x \in M$ eine ϵ-Umgebung von x gibt, auf der f beschränkt ist.

(a) Sei M kompakt. Zeigen Sie: Ist $f : M \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt, dann ist f beschränkt.
HINWEIS: Zeigen Sie, dass f nicht lokal beschränkt ist, wenn f unbeschränkt ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine lokal beschränkte Funktion an, die nicht beschränkt ist.

LÖSUNG:

(a) Wir zeigen: Aus f nicht beschränkt folgt f nicht lokal beschränkt.
Sei f unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge $(x_n) \subseteq M$, so dass $|f(x_n)| \to \infty$. **[1]**
Für $n \in \mathbb{N}$ wähle man z.B. ein $x_n \in M$, s.d. $|f(x_n)| > n$. **[1]**
Da M kompakt ist, gibt es eine in M konvergente Teilfolge (x_{n_k}). **[2]**
Sei $x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in M$. **[1]**
Sei $\epsilon > 0$. Behauptung: $f|_{B_\epsilon(x)}$ ist unbeschränkt.
Wegen $x_{n_k} \to x$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq K$ gilt, dass $d(x_{n_k}, x) < \epsilon$. **[1]**
Wegen $|f(x_{n_k})| \to \infty$ folgt, dass $f|_{B_\epsilon(x)}$ unbeschränkt ist. **[1]**
Also ist f nicht lokal beschränkt. **[1]**

(b) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$. **[2]**

2. **Differenzierbarkeit** **[10 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{y} & \text{für } y \neq 0, \\ x & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

(a) Wie lauten die partiellen Ableitungen auf der x-Achse?

$\partial_x f(x,0) = 1$ **[1]**	$\partial_y f(x,0) = \frac{1}{2}x^2$ **[2]**

(b) Zeigen Sie, dass $\partial_x f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

Für $y \neq 0$ ist $\partial_x f(x,y) = e^{xy}$. **[1]**
Wegen (a), $\partial_x f(x,0) = 1$ **[1]**
folgt, dass $\partial_x f(x,y) = e^{xy}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. **[1]**
Als Kombination stetiger Funktionen ist $\partial_x f$ also stetig **[1]**

Sie dürfen im folgenden (ohne Beweis) benutzen, dass auch $\partial_y f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

(c) Ist f differenzierbar? **[1]**

☒ Ja ☐ Nein

(d) Wie lautet die Richtungsableitung in Richtung $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ im Punkt $(1,0)$?

$\partial_v f(1,0) = \operatorname{grad} f(1,0) \cdot \binom{v_1}{v_2} = \binom{1}{\frac{1}{2}} \cdot \binom{v_1}{v_2} = v_1 + \frac{1}{2}v_2$ **[2]**

LÖSUNG:

(a) $\partial_x f(x,0) = \frac{d}{dx}x = 1$. $\partial_y f(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{xh}-1}{h}-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{xh}-1-xh}{h^2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{xe^{xh}-x}{2h} \overset{\text{l'H}}{=} \frac{x^2}{2}$.

(b) s.o.

(c) f ist stetig partiell differenzierbar, also auch (total) differenzierbar.

(d) s.o., da f differenzierbar.

3. **Taylorentwicklung** **[10 Punkte]**
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei dreimal stetig differenzierbar und der Punkt $(x^*, y^*) = (1,1)$ sei ein stationärer Punkt von f mit $f(x^*, y^*) = 2$. Weiter sei

$$\partial_x^2 f(x^*, y^*) = 0,\ \partial_x \partial_y f(x^*, y^*) = 1,\ \partial_y^2 f(x^*, y^*) = 3.$$

(a) Der Punkt (x^*, y^*) ist ein **[2]**

☐ lokales Minimum ☐ lokales Maximum ☒ Sattelpunkt

von f.

(b) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung von f im Entwicklungspunkt (x^*, y^*) bis zur zweiten Ordnung? **[4]**

$$f(x,y) = 2 + (x-1)(y-1) + \frac{3}{2}(y-1)^2 \ \Big(= \frac{9}{2} - x - 4y + xy + \frac{3}{2}y^2 \Big) + R_2\big((x,y),(x^*,y^*)\big)$$

(c) Sei nun $g(u,v) = f(1+uv, 1+u-v)$. Wie lautet die Hessematrix von g im Ursprung? **[4]**

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG:

(a) Die Determinante der Hessematrix $\det H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1$ ist negativ. Die Hessematrix ist indefinit, also liegt ein Sattelpunkt vor.

(b) Formel für die Taylorentwicklung

(c) Durch Einsetzen der Taylorentwicklung von f erhält man
$g(u,v) = f(1+uv, 1+u-v) = 2 + \underbrace{(uv)(u-v)}_{\text{3. Ordnung}} + \frac{3}{2}(u-v)^2 + R_2\big((1+uv, 1+u-v),(1,1)\big)$
$= 2 + \frac{3}{2}u^2 - 3uv + \frac{3}{2}v^2 +$ Terme 3. Ordnung.

4. **Implizite Funktionen** **[12 Punkte]**

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y - 3 + e^{y-x}$. Die Gleichung $f(x,y) = 0$ soll nach y aufgelöst werden.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ genau eine Nullstelle besitzt, die mit $\tilde{y}(x)$ bezeichnet werden soll. HINWEIS: Monotonie. **[4]**

(b) Zeigen Sie, dass $\tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. HINWEIS: Satz über implizite Funktionen. **[3]**

(c) Bestimmen Sie dasjenige x_0, für das $\tilde{y}\,'(x_0) = 0$ gilt. **[5]**

LÖSUNG:

(a) Für festes x ist $y \mapsto f(x,y)$ stetig und streng monoton steigend, **[1]**
da $\partial_y f(x,y) = 1 + e^{y-x} > 0$. **[1]**
Wegen $\lim_{y \to \pm\infty} f(x,y) = \pm\infty$ **[1]**
und dem Zwischenwertsatz gibt es zu jedem x also genau ein $y =: \tilde{y}(x)$ mit $f(x, \tilde{y}(x)) = 0$. **[1]**

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = \tilde{y}(x_0)$, d.h., $f(x_0, y_0) = 0$. Da f stetig differenzierbar ist **[1]**
und wegen $\partial_y f(x_0, y_0) = 1 + e^{y_0 - x_0} > 0$ ist die Gleichung lokal nach y auflösbar, **[1]**
d.h., es gibt eine, in einer Umgebung von x_0 definierte, stetig differenzierbare Funktion $\hat{y}(x)$, für die $f(x, \hat{y}(x)) = 0$ gilt. Wegen der in (a) gezeigten Eindeutigkeit muss $\hat{y}(x) = \tilde{y}(x)$ gelten, d.h., $\tilde{y}$ ist in einer Umgebung von x_0 stetig differenzierbar. Da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig war, ist $\tilde{y}$ überall stetig differenzierbar. **[1]**

(c) Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt somit **[1]**

$$\tilde{y}\,'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \tilde{y}(x))}{\partial_y f(x, \tilde{y}(x))} = -\left.\frac{1 - e^{y-x}}{1 + e^{y-x}}\right|_{y = \tilde{y}(x)}$$

$\tilde{y}\,'(x) = 0$ ist also gleichbedeutend mit $e^{\tilde{y}(x) - x} = 1$, **[1]**
bzw., $\tilde{y}(x) = x$. **[1]**
Eingesetzt in $f(x,y) = 0$ ergibt das $0 = f(x,x) = 2x - 3 + 1$, bzw., $x = 1$. **[1]**
Somit ist $x_0 = 1$ der einzige stationäre Punkt von $\tilde{y}$ mit $\tilde{y}(1) = 1$. **[1]**

5. **Extrema mit Nebenbedingungen** **[14 Punkte]**
Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-4)^2$ auf der Menge $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 25\}$ wie folgt:

(a) Wie lauten der Gradient und die Hessematrix von f?

$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-3) \\ 2(y-4) \end{pmatrix}$ **[1]**	$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **[1]**

(b) Besitzt f einen stationären Punkt im Inneren von K? **[2]**

☐ Ja ☒ Nein

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Kandidaten für Extremwerte von f auf dem Rand ∂K. **[7]**

(d) In welchen Punkten liegen die globalen Maxima und Minima von $f|_K$? **[3]**

LÖSUNG:

(a) s.o.

(b) Aus $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$ folgt $x = 3$ und $y = 4$. wegen $\|(3,4)\| = 5$ liegt der einzige stationäre Punkt von F nicht in K°.

(c) Der Rand von K wird beschrieben durch die Nullstellen von $g(x,y) = x^2 + y^2 - 25$. **[1]**
Wegen $\operatorname{grad} g(x,y) = (2x, 2y)$ ist g nur im Ursprung nicht regulär, auf ∂K dagegen schon. **[1]**
Extremwerte auf dem Rand erfüllen also die Gleichung

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y),$$

bzw., **[2]**

$$\begin{aligned} 2(x-3) &= 2\lambda x \\ 2(y-4) &= 2\lambda y, \end{aligned}$$

also $(1-\lambda)x = 3$, $(1-\lambda)y = 4$. Offenbar muss $\lambda \neq 0$ gelten. Somit $x = \frac{3}{1-\lambda}$, $y = \frac{4}{1-\lambda}$. **[1]**
Eingesetzt in $g(x,y) = 0$ ergibt das

$$\frac{9}{(1-\lambda)^2} + \frac{16}{(1-\lambda)^2} - 25 = 0,$$

d.h., $(1-\lambda)^2 = 1$, bzw. $\lambda = 0, 2$. **[1]**
Kandidaten für Extrema auf dem Rand sind also $x = 3, y = 4$ und $x = -3, y = -4$. **[1]**

(d) K ist kompakt und f stetig, also nimmt die Funktion f auf K Maximum und Minimum an. **[1]**
Die einzigen Kandidaten sind $(3,4)$ und $(-3,-4)$. Wegen $f(3,4) = 0$ und $f(-3,-4) = 100$ ist $(3,4)$ das absolute Minimum **[1]**
und $(-3,-4)$ das absolute Maximum. **[1]**

6. **Variationsrechnung** **[10 Punkte]**

Gegeben ist das Funktional $F(x) = \int_0^2 \left(x(t)^2 + \dot{x}(t)^2\right)dt$ für $x \in C^2([0,2])$ mit den Randbedingungen $x(0) = 1$, $x(2) = 1$.

(a) Wie lautet die Lagrange-Funktion zu diesem Problem? **[2]**

$$L(t,x,v) = x^2 + v^2$$

(b) Geben Sie ein erstes Integral $E(t,x,v)$ für die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals F an. **[2]**

$$E(t,x,v) = v^2 - x^2$$

(c) Wie lautet explizit die Euler-Lagrange-Gleichung für F? **[3]**

$$\ddot{x} = x$$

(d) Finden Sie mit Hilfe der allgemeinen Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, den stationären Punkt $x^*(t)$ von F. **[3]**

$$x^*(t) = \frac{\cosh(t-1)}{\cosh(1)} = \frac{1}{1+e^2}e^t + \frac{e^2}{1+e^2}e^{-t}$$

LÖSUNG:

(a) $F(x) = \int_0^2 L(t, x(t), \dot{x}(t))dt$ mit der Lagrangefunktion $L(t,x,v) = x^2 + v^2$.

(b) Da die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt ist $E(t,x,v) = v\partial_v L(t,x,v) - L(t,x,v) = 2v^2 - x^2 - v^2 = v^2 - x^2$ eine Konstante der Bewegung.

(c) $\frac{d}{dt}\partial_v L - \partial_x L = 0$ ergibt $\ddot{x} = x$.

(d) Die Randbedingungen für $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ ergeben $1 = x(0) = c_1 + c_2$, $1 = x(2) = c_1 e^2 + c_2 e^{-2} = c_1 e^2 + (1-c_1)e^{-2}$, also $c_1 = \frac{1-e^{-2}}{e^2-e^{-2}} = \frac{e^2-1)}{e^4-1} = \frac{1}{e^2+1}$. $c_2 = 1 - \frac{1}{e^2+1} = \frac{e^2}{e^2+1}$.
Also ist $x(t) = \frac{e^t}{e^2+1} + \frac{e^{2+t}}{e^2+1} = \frac{e^{t-1}+e^{t+1}}{e+e^{-1}} = \frac{\cosh(t-1)}{\cosh(1)}$.