Probeklausur

1.1 Metrische Räume [7 Punkte]

Sei $f : X \to Y$ eine surjektive und stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. X sei kompakt. Man zeige, dass dann Y auch kompakt ist.

1.2 Differenzierbarkeit [10 Punkte]

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

Man zeige

(a) f ist partiell differenzierbar

(b) f ist nicht stetig

(c) f ist nicht total differenzierbar

(d) Wie lautet die Richtungsableitung in Richtung $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ im Punkt $(1, 0)$?

1.3 Taylorentwicklung [10 Punkte]

Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei dreimal stetig differenzierbar und der Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ sei ein stationärer Punkt von f mit $f(x_0, y_0, z_0) = 3$. Weiter sei

$$\partial_x^2 f(x_0, y_0, z_0) = -1, \partial_y^2 f(x_0, y_0, z_0) = -2, \partial_z^2 f(x_0, y_0, z_0) = -1$$

alle anderen Ableitungen verschwinden.

(a) Klassifizieren Sie den Punkt (x_0, y_0, z_0)

(b) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung von f in (x_0, y_0, z_0) bis zur zweiten Ordnung?

(c) Sei nun $g(u, v, w) = f(1 + uv, 1 - u, 1 - v)$. Wie lautet die Hessematrix von g im Ursprung?

1.4 Implizite Funktionen [12 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^5 + z + xy = 1$ für festes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung besitzt. *Hinweis*: Monotonie

(b) Beweisen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die jedem Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die eindeutige Lösung der Gleichung $z^5 + z + xy = 1$ zuordnet, differenzierbar ist und berechnen Sie deren Ableitung im Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie das (x, y) für das $g'(x, y)$ die Nullabbildung ist.

1.5 Extrema mit Nebenbedingungen [14 Punkte]

Man bestimme die Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) = 2xz - y^2$$

auf der Menge $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ wie folgt:

(a) Wie lauten der Gradient und die Hesse-Matrix von f?

(b) Besitzt f einen stationären Punkt im Inneren von K?

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Kandidaten für Extremwerte von f auf dem Rand ∂K.

(d) In welchen Punkten liegen die globalen Maxima und Minima von $f|_K$?

1.6 Variationsrechnung [10 Punkte]

Gegeben sei ein Funktional $F = \int_0^2 (x(t)^4 - \dot{x}(t)^2)dt$ mit den Randbedingungen $x(0) = 1, x(2) = 1$.

(a) Wie lautet die Lagrange-Funktion zu diesem Problem?

(b) Geben Sie ein erstes Integral $E(x, v)$ an.

(c) Wie lautet explizit die Euler-Lagrangegleichung für F?

1.7 Parametrisierung auf Bogenlänge [4 Punkte]

Geben Sie explizit eine Parametrisierung auf Bogenlänge, $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, der Kettenlinie $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t)(-t, -\cosh t)$.

1.8 Trennbare Differentialgleichung [8 Punkte]

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = \sqrt{1 - x^2}$ mit $x(t) \in \mathbb{R}$

(a) Für welche Anfangswerte zur Zeit t=0 gibt es auf ganz $\mathbb{R}$ konstante Lösungen?

(b) Bestimmen Sie für den Anfangswert $x(0) = 0$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung. *Hinweis:* $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) Ist die Lösung der Differentialgleichung mit dem Anfangswert x(0)=-1 eindeutig bestimmt?