Übungen zum Ferienkurs Analysis II

Implizite Funktionen und Differentialgleichungen

4.1 Umkehrbarkeit ⋆

Man betrachte die durch $g(s,t) = (e^s \cos(t), e^s \sin(t))$ gegebene Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass g die Bedingungen des Satzes über Umkehrfunktionen erfüllt, aber nicht injektiv ist

Lösung Wir berechnen die Jacobimatrix von g.

$$J_g = \begin{pmatrix} e^s \cos(t) & -e^s \sin(t) \\ e^s \sin(t) & -e^s \cos(t) \end{pmatrix}$$

Für die Determinante erhalten wir

$$\det J_g = e^{2s} \left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right) = e^{2s} > 0 \quad \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

Nach dem Satz über Umkehrfunktionen folgt damit, dass g auf ganz $\mathbb{R}^2$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. g ist aber nicht injektiv denn es gilt $g(s, t + 2\pi) = g(s,t)$.

4.2 Implizite Funktionen ⋆

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ von $(0,0,0)$ gibt , in der das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sin(x - y^2 + z^3) - \cos(x + y + z) + 1 &= 0 \\ \sin(y + x^2 - z^3) + \cos(x - y) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

eindeutig nach (x,y) aufgelöst werden kann (d.h. $(x,y) = h(z)$ mit einer geeigneten Funktion h). Berechnen Sie weiterhin die Ableitung von h im Nullpunkt.

Lösung Wir betrachten die stetig differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \begin{pmatrix} \sin(x - y^2 + z^3) - \cos(x + y + z) + 1 \\ \sin(y + x^2 - z^3) + \cos(x - y) - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt $f(0,0,0) = (0,0)$, der Punkt ist also eine Nullstelle. Nun berechnen wir das partielle Differential

$$\begin{aligned} D_{xy} f(0,0,0) &= \begin{pmatrix} \cos(x - y^2 + z^3) + \sin(x + y + z) & -2y\cos(x - y^2 + z^3) + \sin(x + y + z) \\ 2x\cos(y + x^2 - z^3) - \sin(x - y) & \cos(y + x^2 - z^3)\sin(x - y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Einheitsmatrix invertierbar, also können wir nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung an der Stelle $(0,0,0)$ entsprechend auflösen mit einer eindeutig bestimmten Funktion $h(z)$, die sogar differenzierbar ist. Die Ableitung berechnen wir ebenfalls nach dem Satz über implizite Funktionen

$$h'(0) = -[\mathrm{D}_{xy} f(0, h(0))]^{-1} \mathrm{D}_z f(0, h(0))$$

Das partielle Differential $\mathrm{D}_z f(x,y,z)$ lautet

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_z f(0,0,0) &= \begin{pmatrix} 3z^2\cos(x-y^2+z^3)+\sin(x+y+z) \\ -3z^2\cos(y+x^2-z^3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und damit erhalten wir für die Ableitung

$$\begin{aligned}h'(0) &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4.3 Umkehrbarkeit II

Zeige: die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy)$ ist in allen Punkten ein lokaler $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

Lösung Die Abbildung ist stetig differenzierbar und wir betrachten die Invertierbarkeit der Jacobi-Matrix

$$J_f = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix}$$

Die Determinante der Jacobi-Matrix lautet

$$\det J_f = 4x^2 + 4y^2 > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Damit folgt die Behauptung aus dem Satz über die Umkehrfunktion.

4.4 Umkehrbarkeit III

Zeige, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^3 + 3xe^y, y - x^2)$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Lösung Die Abbildung ist stetig differenzierbar. Wir betrachten wieder die Jacobi Matrix um die Anwendbarkeit des Satzes über Umkehrfunktionen zu überprüfen

$$J_f = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3e^y & 3xe^y \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$$

Um die Invertierbarkeit zu überprüfen berechnen wir die Determinante

$$\det J_f = 3x^2 + 3e^y + 6x^2e^y > 0$$

Die Matrix ist also überall invertierbar. Damit folgt nach dem Satz über die Umkehrfunktion, dass f ein lokaler C^1-Diffeomorphismus ist. Nun muss noch gezeigt werden, dass f bijektiv ist d.h. zu jedem $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ existiert genau ein $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sodass $f(x,y) = (u,v)$. Dies ist äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u &= x^3 + 3xe^y \\ v &= y - x^2 \end{aligned}$$

und damit äquivalent zu

$$\begin{aligned} x^3 + 3xe^y - u &= 0 \\ y &= x^2 + v. \end{aligned}$$

Die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + 3xe^y - u$ ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Die Ableitung ist positiv d.h. die Funktion ist streng monoton wachsend, also injektiv. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} g(x) &= \infty \\ \lim_{x\to-\infty} g(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz nimmt die Funktion daher jede reelle Zahl an, ist also surjektiv. Damit hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung und f ist also bijektiv.

4.5 Separierbare Differentialgleichungen ⋆

Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

(a) $y'x = 2y$

(b) $y' = \frac{2x}{x^2+1} y$

(c) $y'(y+1)^2 + x^3 = 0$

Lösung Man löst jeweils durch Trennung der Variablen:

(a) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} + C$ ergibt $\ln|y| = 2\ln|x| + C$, bzw. $y = \pm e^C x^2$.
Achtung: die Lösungen lassen sich bei $x = 0$ differenzierbar stückeln:

$$y(x) = \begin{cases} c_1 x^2 & \text{für } x \geq 0, \\ c_2 x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Für $x = 0$ folgt aus der Differentialgleichung sofort $y(0) = 0$. Somit sind andere Anfangswerte dort nicht möglich.

(b) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2xdx}{x^2+1} + C$ ergibt $\ln|y| = \ln(x^2+1) + C$, als implizite Lösung.
Durch Auflösen nach y erhält man

$$y(x) = \pm e^C (x^2 + 1)$$

Die Nullfunktion ist auch eine Lösung. Somit kann man die Lösungen zusammenfassen zu

$$y(x) = c(x^2+1) = cx^2 + c, \ c \in \mathbb{R}$$

(c) $\int (y+1)^2 dy = \int (-x)^3 dx + C$ ergibt $\frac{1}{3}(y+1)^3 = -\frac{1}{4}x^4 + C$.
Die Höhenlinien der Funktion $F(x,y) = \frac{1}{3}(y+1)^3 + \frac{1}{4}x^4$ ergeben die Lösungen der Differentialgleichung.

4.6 Lineare Differentialgleichungen

Gegeben ist die Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 0$.

(a) Welche Dimension hat der Lösungsraum der Gleichung?

(b) Welche der folgenden Funktionen von x sind Lösungen der Gleichung?

(i) $-\ln x$

(ii) 0

(iii) 1

(iv) $2e^{-x}$

(v) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

(c) Geben Sie ein Fundamentalsystem der Gleichung an!

(d) Geben Sie die Menge aller reellen Lösungen der Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 3$ an!

Lösung

(a) homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung, ihr Lösungsraum ist also dreidimensional

(b) Die Gleichung hat konstante Koeffizienten, somit sind ihre Lösungen Produkte von Polynomen (maximal 2. Grades) und Exponentialfunktionen, und Linearkombinationen davon. Die Nullfunktion ist immer eine Lösung. Man überprüft leicht, dass auch e^{-x} eine Lösung ist, da -1 Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

(c) Das charakteristische Polynom ist $\chi(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 15\lambda + 9$ mit der aus (b) bekannten Nullstelle -1. Polynomdivision ergibt $\chi(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2+6\lambda+9) = (\lambda+1)(\lambda+3)^2$. Also ist -3 noch eine doppelte Nullstelle. Somit ist $(e^{-x}, e^{-3x}, xe^{-3x})$ Basis des Lösungsraums.

(d) Offenbar ist die konstante Lösung $y(x) = \frac{1}{3}$ Lösung der inhomogenen DGL. Der gesamte Lösungsraum besteht aus der Summe dieser konstanten Lösung und einer beliebigen Lösung des homogenen Systems.

4.7 Separierbare Differentialgleichungen ⋆

(a) Finden Sie auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen von $yy' = x(1-y^2)$ mit $y(0) = y_0, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(b) Wie viele konstante Lösungen gibt es?

(c) Wie viele auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen mit $y(0) = 0$ gibt es?

Lösung

(a) Wir lösen durch Separation der Variablen. Für eine Lösung $y(x)$ mit $y(0) = y_0$ muss gelten

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ydy}{1-y^2} = \int_0^x x'dx', \text{ also } -\frac{1}{2}\ln|1-y(x)^2| + \frac{1}{2}\ln|1-y_0^2| = \frac{1}{2}x^2.$$

Da die Integration über die Singularitäten $y = \pm 1$ nicht möglich ist, müssen $1 - y_0^2$ und $1 - y(x)^2$ für alle x das gleiche Vorzeichen haben. Somit ergibt beidseitiges exponenzieren

$$1 - y(x)^2 = e^{-x^2}(1 - y_0^2).$$

Die rechte Seite ist immer kleiner als 1. Damit $y(x)$ stetig ist, muss also gelten:

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - e^{-x^2}(1 - y_0^2)}, & \text{falls } y_0 > 0, \\ -\sqrt{1 - e^{-x^2}(1 - y_0^2)}, & \text{falls } y_0 < 0 \end{cases}$$

denn der Radikant ist in beiden Fällen immer positiv.

(b) Die rechte Seite der Differentialgleichung ist Null für alle x, genau dann, wenn $y = \pm 1$ ist. Somit sind $y(x) = \pm 1$ genau zwei konstante Lösungen.

(c) Für $y_0 = 0$ sind $y_\pm(x) = \pm\sqrt{1 - e^{-x^2}}$ die einzigen zwei Lösungen auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim\limits_{0} y_\pm(x) = 0$. Für kleine x gilt $y_\pm(x) \approx \pm\sqrt{x^2} = \pm|x|$. Somit gibt es genau zwei Lösungen

$$y_1(x) = \begin{cases} y_+(x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ y_-(x) & \text{für } x < 0 \end{cases} \text{ und } y_2(x) = -y_1(x),$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und Lösungen der Differentialgleichung mit $y(0) = 0$ sind.

4.8 Lineares Differentialgleichungssystem $\star$

Lösen sie das AWP $\dot{x} = Ax$ mit $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Schreiben Sie das System als eine Differentialgleichung höherer Ordnung für x_1.

Lösung Ausgeschrieben ist

$$\dot{x_1} = 2x_2\dot{x_2} = 2x_3\dot{x_3} = -x_1 + x_2$$

also $\ddot{x_1} = 2\dot{x_2} = 4x_3$ und $\dddot{x_1} = 4\dot{x_3} = -4x_1 + 4x_2$.
Also lösen wir

$$\dddot{x_1} - 2\dot{x_1} + 4x_1 = 0$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 5$, $\dot{x_1}(0) = 2x_2(0) = 6$ und $\ddot{x_1}(0) = 2\dot{x_2}(0) = 4x_3(0) = 12$. Das charakteristische Polynom $\lambda^3 - 2\lambda + 4$ mit der (erratenen) Nullstelle $\lambda_1 = -2$.
Polynomdivision ergibt

$$(\lambda^3 - 2\lambda + 4) : (\lambda + 2) = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

die weiteren Nullstellen sind $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm i$.
Ein reelles Fundamentalsystem ist also

$$e^{-2t}, e^t \cos t, e^t \sin t.$$

Wir suchen α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass $x_1(t) = \alpha e^{-2t} + \beta e^t \cos t + \gamma e^t \sin t$ die Anfangsbedingungen erfüllt.
Taylorentwicklung:

$$e^{-2t} = 1 - 2t + 2t^2 + ...$$

$$e^t \cos t = (1 + t + \frac{1}{2}t^2 + ...)(1 - \frac{1}{2}t^2 + ...) = 1 + t + \mathcal{O}(t^3)$$

$$e^t \sin t = (1 + t + \frac{1}{2}t^2 + ...)(t - \frac{1}{6}t^3 + ...) = t + t^2 + \mathcal{O}(t^3)$$

Somit gilt:

$$x_1(t) = \alpha + \beta + t(-2\alpha + \beta + \gamma) + t^2(2\alpha + \gamma) + \mathcal{O}(t^3).$$

Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= x_1(0) = 5, \\ -2\alpha + \beta + \gamma &= \dot{x_1}(0) = 6, \\ 2\alpha + \gamma &= \frac{1}{2}\ddot{x_1}(0) = 6, \end{aligned}$$

Also

$$\gamma = 6 - 2\alpha$$

$$-4\alpha + \beta = 0,$$

somit $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $\gamma = 4$.
Die Lösung des AWPs lautet also

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-2t} + 4e^t(\cos t + \sin t) \\ x_2(t) &= \frac{1}{2}\dot{x_1}(t) = \frac{1}{2}(-2e^{-2t} + 4e^t(\cos t + \sin t) + 4e^t(-\sin t + \cos t)) = -e^{-2t} + 4e^t \cos t \\ x_3(t) &= \frac{1}{2}\dot{x_2}(t) = \frac{1}{2}(2e^{-2t} + 4e^t(\cos t - \sin t)) = e^{-2t} + 2(\cos t - \sin t) \end{aligned}$$