Übungen zum Ferienkurs Analysis II

Implizite Funktionen und Differentialgleichungen

4.1 Umkehrbarkeit $\star$

Man betrachte die durch $g(s,t) = (e^s \cos(t), e^s \sin(t))$ gegebene Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass g die Bedingungen des Satzes über Umkehrfunktionen erfüllt, aber nicht injektiv ist

4.2 Implizite Funktionen $\star$

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ von $(0,0,0)$ gibt , in der das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sin(x - y^2 + z^3) - \cos(x + y + z) + 1 &= 0 \\ \sin(y + x^2 - z^3) + \cos(x - y) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

eindeutig nach (x, y) aufgelöst werden kann (d.h. $(x, y) = h(z)$ mit einer geeigneten Funktion h). Berechnen Sie weiterhin die Ableitung von h im Nullpunkt.

4.3 Umkehrbarkeit II

Zeige: die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ ist in allen Punkten ein lokaler $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

4.4 Umkehrbarkeit III

Zeige, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^3 + 3xe^y, y - x^2)$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus auf $\mathbb{R}^2$ ist.

4.5 Separierbare Differentialgleichungen $\star$

Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

(a) $y'x = 2y$

(b) $y' = \frac{2x}{x^2+1}y$

(c) $y'(y+1)^2 + x^3 = 0$

4.6 Lineare Differentialgleichungen

Gegeben ist die Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 0$.

(a) Welche Dimension hat der Lösungsraum der Gleichung?

(b) Welche der folgenden Funktionen von x sind Lösungen der Gleichung?

  (i) $-\ln x$

  (ii) 0

  (iii) 1

  (iv) $2e^{-x}$

  (v) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

(c) Geben Sie ein Fundamentalsystem der Gleichung an!

(d) Geben Sie die Menge aller reellen Lösungen der Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 3$ an!

4.7 Separierbare Differentialgleichungen $\star$

(a) Finden Sie auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen von $yy' = x(1 - y^2)$ mit $y(0) = y_0, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(b) Wie viele konstante Lösungen gibt es?

(c) Wie viele auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen mit $y(0) = 0$ gibt es?

4.8 Lineares Differentialgleichungssystem $\star$

Lösen sie das AWP $\dot{x} = Ax$ mit $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Schreiben Sie das System als eine Differentialgleichung höherer Ordnung für x_1.