1 Lokale Umkehrbarkeit und implizite Funktionen

In diesem Kapitel werden Kriterien vorgestellt, wann eine Funktion umkehrbar ist oder eine Gleichung nach einer Variablen auflösbar ist. Es geht *nicht* darum dies auch tatsächlich zu tun. Das Interessante ist, dass man hier auch eine Formel lernt um die Ableitung der Auflösung zu bilden – ohne die eigentliche Gleichung tatsächlich auszulösen. Im Gegensatz zur Vorlesung formulieren wir den Satz nur für Abbildungen der Form $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, d.h. nur für endlich-dimensionale Vektorräume. Damit die Abbildung invertierbar sein kann, muss sie zwischen Vektorräumen der gleichen Dimension abbilden.

1.1 Lokale Umkehrbarkeit

Der Satz über Umkehrfunktionen gibt an unter welchen Bedingungen eine Funktion eine Umkehrfunktion hat und welche Eigenschaften diese Umkehrfunktion besitzt.

Satz 1.1 (Satz über Umkehrfunktionen) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei $a \in U$ und $b := f(a)$. Die Jacobi Matrix $J_f(a)$ sei an der Stelle a invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_a \subset U$ von a und eine offene Umgebung V_b von b, sodass f die Menge U_a bijektiv auf die Menge V_b abbildet und die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : V_b \to U_a$ stetig differenzierbar ist. Für die Ableitung gilt*

$$g'(b) = f^{-1'}(f(a)) = f'(a)^{-1}.$$

Bemerkungen:

- $f|_{U_a}$ ist eine bijektive Abbildung. Damit ist $f|_{U_a}$ insbesondere injektiv.
- Dass die Jacobi-Matrix an der Stelle a invertierbar ist, bedeutet, dass $f'(a)$ eine bijektive, lineare Abbildung ist (Isomorphismus).
- Die Invertierbarkeit der Jacobi-Matrix kann man durch Ausrechnen der Determinante prüfen: J invertierbar $\Leftrightarrow \det(J) \neq 0$
- Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion erhält man leicht durch Ableiten der Identitäten $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}$ und $f \circ f^{-1} = \mathbb{1}$

Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \mapsto (2xy, y^2 - x^2)$. Beweisen Sie,

(a) Zu jedem (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gibt es eine Umgebung U von (x_0, y_0), sodasss $f|_U$ injektiv ist.

(b) f selbst ist nicht injektiv.

Lösung

(a) Wir prüfen jetzt alle Voraussetzungen aus dem Satz über die Umkehrfunktion. Die Komponenten von f sind stetig differenzierbar und damit auch f. Wir berechnen die Jacobi Matrix von f und prüfen die Invertierbarkeit dieser Matrix für beliebiges $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

$$\begin{aligned} J_f(x_0, y_0) &= \begin{pmatrix} 2y_0 & 2x_0 \\ -2x_0 & 2y_0 \end{pmatrix} \\ \det(J_f(x_0, y_0)) &= 4(x_0^2 + y_0^2) > 0 \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix ist also invertierbar und damit ist f an jedem Punkt in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ lokal umkehrbar und damit ist auch $f|_U$ injektiv.

(b) Da z.B. $f(-1,-1) = (2,0) = f(1,1)$, ist f selbst nicht injektiv.

Merke: lokale Umkehrbarkeit ist *nicht* globale Umkehrbarkeit.

1.2 Satz über implizite Funktionen

Der Satz über implizite Funktionen trifft Aussagen über die Möglichkeit Gleichungen nach bestimmten Variablen aufzulösen. Es gilt z.B. $f(x,y) = 0$. Ist es dann möglich eine Funktion $\widetilde{y}$ zu finden, sodass $y = \widetilde{y}(x)$? In welchem Bereich ist das möglich?

Definition 1.1 (partielle Differentiale) *Für eine differenzierbare Funktion $f : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ mit $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$, definieren wir die* partiellen Differentiale

$$\begin{aligned} D_x f(x,y) &: U_1 \to \mathbb{R}^m, h \mapsto f'(x,y)(h,0) \\ D_y f(x,y) &: U_2 \to \mathbb{R}^m, k \mapsto f'(x,y)(0,k) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das totale Differential

$$Df(x,y)(h,k) := \underbrace{f'(x,y)}_{J}(h,k) = \underbrace{D_x f(x,y)}_{J_x} h + \underbrace{D_y f(x,y)}_{J_y} k$$

J_x und J_y sind dann die zu den jeweiligen Variablen zugehörigen Teilmatrizen der Jacobimatrix J.

Satz 1.2 (Satz über implizite Funktionen) *Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ sowie eine Funktion f mit $f : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ einmal stetig differenzierbar. Ferner habe f eine Nullstelle $(a, b) \in U_1 \times U_2$ und sei $D_y f(a, b)$ invertierbar.*
Dann gibt es offene Umgebungen V_1, V_2 mit $a \in V_1 \subset U_1$ und $b \in V_2 \subset U_2$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : V_1 \to V_2$ sodass

$$f(x, g(x)) = 0 \Leftrightarrow y = g(x) \quad \forall x \in V_1.$$

Desweiteren gilt

$$g'(x) = -[D_y f(x, g(x))]^{-1} D_x f(x, g(x)) \quad \forall x \in V_1.$$

Bemerkungen:

- Die Formel für die Ableitung erhält man durch Differenzieren von $f(x, g(x)) = 0$ unter Anwendung der Kettenregel.

1.2.1 Kochrezept: Anwendung Satz über Implizite Funktionen

$\boxed{\text{Ist } f \text{ stetig differenzierbar?}} \xrightarrow[\text{Nein}]{}$ Satz nicht anwendbar

↓ Ja

$\boxed{\text{Hat } f \text{ in } (x_0, y_0) \text{ eine Nullstelle} \Leftrightarrow f(x_0, y_0) = 0?} \xrightarrow[\text{Nein}]{}$ Satz nicht anwendbar

↓ Ja

$\boxed{\text{Ist } \mathrm{D}_y f(x_0, y_0) \text{ invertierbar d.h. } \det(\mathrm{D}_y f(x_0, y_0)) \neq 0?} \xrightarrow[\text{Nein}]{}$ Satz nicht anwendbar

↓ Ja

Die Gleichung $f(x_0, y_0) = 0$ kann in einer Umgebung um (x_0, y_0) aufgelöst werden.

1.2.2 Beispiel: Einheitskreis

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Die Nullstellenmenge ist gerade der Einheitskreis. Kann diese Gleichung überall nach y aufgelöst werden?

Lösung Berechne

$$D_y f(x,y) = \partial_y f(x,y) = 2y$$

Offensichtlich ist $D_y f$ nur für $y \neq 0$ invertierbar. An allen Stellen $y \neq 0$ lässt sich $f(x,y) = 0$ also lokal invertieren. Allerdings bedeutet das nicht, dass es eine globale Funktion $y = g(x)$ gibt. Das sieht man leicht wenn man nach y umstellt, es ergibt sich $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ d.h. zu jedem y-Wert gibt es zwei x-Werte. Im Fall $y = 0$ d.h. bei $x = \pm 1$ verzweigen sich diese beiden Möglichkeiten und eine eindeutige Auflösung ist nicht möglich.

1.2.3 Beispiel: Berechnung der Ableitung

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto e^{xy} - x^2$. Gibt es Stellen an denen sich die Gleichung bei $f(x,y) = 0$ nach y auflösen lässt? Falls ja, bestimmen Sie für eine solche Stelle die Ableitung der aufgelösten Funktion $g(x)$.

Lösung Die Ableitung nach der aufzulösenden Variable lautet

$$\partial_y f(x,y) = xe^{xy} \neq 0 \quad \forall x \neq 0.$$

An allen Punkten außerhalb der x-Achse, die obige Gleichung erfüllen lässt sich die Gleichung auflösen. Ein solcher Punkt ist z.B. $(x,y) = (1,0)$. Ist g dann nach dem Satz über implizite Funktionen die Funktion mit $g(1) = 0$ und $f(1, g(1)) = 0$ so gilt für die Ableitung

$$\begin{aligned} g'(1) &= -\left(\partial_y f(1,0)\right)^{-1} \partial_x f(1,0) \\ &= -(1 \cdot e^{1\cdot 0})^{-1}(0 \cdot e^{1\cdot 0} - 2 \cdot 1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

2 Differentialgleichungen

Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigt sich im Wesentlichen mit der Suche von Lösungskurven $t \mapsto x(t) = x_t$, die durch eine Differentialgleichung gegeben sind.
So stehen verschiedene Ableitungen dieser Kurve x_t in Aquivalenz zu einem gegebenen Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, das im Allgemeinen zeitabhängig ist.

Definition 2.1 *Sei G eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $f : G \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ eine stetige Funktion, dann nennt man*

$$\dot{x} = F(t, x) \tag{1}$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.

Die Lösungen dieser Gleichung ergeben Kurven x_t, die tangential entlang des Vektorfeldes F verlaufen. Aufgrund einer möglichen Verschiebung sind die Lösungen nicht eindeutig.

Bemerkung: Ist ein Anfangswert

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

gegeben, dann nennt man (1) Anfangswertproblem.

2.1 Lineare Differentialgleichungen

Definition 2.2 *Gegeben seien die stetigen Funktionen*

$$t \mapsto b(t) \in \mathbb{R}^n \qquad t \mapsto A(t) \in \mathbb{M}_n$$

Die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung ist

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{3}$$

mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Falls $b(t) = 0$ spricht man von einer homogenen linearen Differentialgleichung. Falls $A(t)$ unabhängig von t ist, dann spricht man von einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

2.1.1 Homogene Differentialgleichung, konstante Koeffizienten

Die vorliegende Differentialgleichung sei von der Form

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

A ist offenbar nicht abhängig von t.

Satz 2.1 *Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$$

ist mit $c \in \mathbb{R}$

$$x(t) = c \cdot e^{At}$$

Bemerkung:

- Die Lösung ist eindeutig bei Vorgabe von $x(t_0) = x_0$:

$$x(t) = e^{At}x_0$$

- Es gilt das *Superpositionsprinzip*:
  Wenn $x(t)$ und $y(t)$ Lösungen sind, dann ist auch eine Linearkombination $\alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t)$ von $x(t)$ und $y(t)$ eine Lösung.

Definition 2.3 (Matrixexponential) *Sei* $A \in \mathbb{M}_n$.
Die Exponentialfunktion ist definiert als

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \tag{4}$$

Eulersche Formel $e^{iAt} = \cos At + i \sin At$

Satz 2.2 (Gruppeneigenschaft *(gilt allgemein)*) *Für alle* $s, t \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$e^{A(t+s)} = e^{At} + e^{As}$$

2.1.2 Inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Die inhomogene lineare Differentialgleichung hat die Form

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + b(t) \tag{5}$$

mit der stetigen Funktion $t \mapsto b(t) \in \mathbb{R}^n$. Die Anfangsbedingung sei $x(0) = x_0$.
Zu beachten ist, dass A unabhängig von t ist.

Satz 2.3 *Die eindeutige Lösung bei festem $x(0) = x_0$ von $\frac{d}{dt}x(t) = e^{At}$ ist*

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds$$

Die Lösung der Gleichung 5 setzt sich zusammen aus der Lösung der homogenen DGL und einer partikulären Lösung der inhomogenen.

2.2 Lösungsmethoden

2.2.1 Trennbare Differentialgleichung (Trennung der Variablen)

Gegeben sei eine Differentialgleichung der folgenden Gestalt:

$$\frac{d}{dt}x(t) = g(t) \cdot f(x(t)) \quad \text{mit } x(t) \in \mathbb{R} \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{f(x)} = g(t)dt$$

Die Lösung ergibt sich durch beidseitiges Integrieren:

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t)dt + const.$$

2.2.2 Exakte Differentialgleichungen

Eine exakte Differentialgleichung (auch vollständig) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$p(x, y(x)) + q(x, y(x))\frac{dy}{dx} = 0$$

für die eine stetig differenzierbare Funktion $F(x, y)$ existiert, so dass

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x, y) = p(x, y) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial y}F(x, y) = q(x, y)$$

Diese sog. Potentialfunktion existiert, falls

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$$

2.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Man ist sehr daran interessiert, ob eine Lösung existiert und ob sie eindeutig ist oder nicht, gerade wenn Differentialgleichungen im Computer gelöst werden. Gibt es nämlich keine Lösung, so kann man lange auf ein numerisches Ergebnis warten, gibt der Computer nur eine aus, so ist es gut zu wissen, ob es bereits die eindeutige Lösung ist, oder ob es mehrere Lösungen gibt.
Auch wenn die Differentialgleichung nicht analytisch gelöst werden kann, so können doch Aussagen über die Art der Lösung getroffen werden. Gerade numerische Methoden um eine Lösung zu nähern können von der Kenntnis über die Eindeutigkeit einer Lösung profitieren.

Satz 2.4 (Eindeutigkeit von Lösungen) *Eine Funktion F sein lokal Lipschitz, $y, \tilde{y}$ seinen Lösungen von*

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t), t)$$

für $t \in [t_0, t_0 + a]$, $a > 0$. Zusätzlich gelte $y(t_0) = \tilde{y}(t_0)$.
Dann gilt

$$y(t) = \tilde{y}(t) \qquad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + a]$$

Satz 2.5 (Picard-Lindelöf, Eindeutige Existenz) *Gegeben sei ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, das lokal lipschitzstetig ist. Dann existiert ein $\delta > 0$ derart, dass die Differentialgleichung*

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t), t)$$

mit dem Anfangswert $x(t_0) = y$ für $|t - t_0| < \delta$ genau eine Lösung hat.

2.4 Beispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator

Diskutieren Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{q} = -q - 2\gamma\dot{q}$$

mit $q(t) \in \mathbb{R}$ als Kurven im Phasenraum $(q(t), \dot{q}(t))$ für die folgenden drei Bereiche der Dämpfungskonstante

1. $\gamma > 1$ (überdämpft)
2. $\gamma = 1$ (kritisch gedämpft)
3. $0 < \gamma < 1$ (schwach gedämpft)

Lösung Wir setzen $x := (q, \dot{q})$ und erhalten das System $\dot{x} = Ax$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = \lambda^2 - (texttr A)\lambda + \det A = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + 1$$

mit den Eigenwerten $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1}$. Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

1. $\gamma > 1$: A hat zwei verschiedene reelle Eigenwerte.
   Nullstellen des charakteristischen Polynoms 2.4:

   $$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

   Es gibt zwei linear unabhängige reelle Eigenvektoren u_1 und u_2 von A zu den reellen Eigenwerten λ_1 und λ_2.
   Entwickeln der Anfangsbedingung $x(0)$ bzgl. der Basis u_1, u_2:

   $$x(t) = e^{tA}x(0) = e^{tA}(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1e^{t\lambda_1}u_1 + c_2e^{t\lambda_2}u_2$$

2. $\gamma = 1$: A hat einen doppelten reellen Eigenwert.
   Nullstellen des charakteristischen Polynoms 2.4:

   $$\lambda_{1,2} = -1$$

   Da dim ker $(A - \lambda\mathbb{1}) = 1$, gibt es einen reellen Eigenvektor u und einen davon linear unabhängigen reellen Hauptvektor 2.Stufe v mit $(A - \lambda\mathbb{1})v = u$.
   Entwickeln der Anfangsbedingung $x(0)$ bzgl. der Basis u, v:

   $$x(t) = e^{tA}x(0) = e^{tA}(c_1u+c_2v) = c_1e^{t\lambda}u+c_2e^{t\lambda}(v+t(A-\lambda\mathbb{1})v) = e^{-t}((c_1+c_2t)u+c_2v)$$

3. $0 < \gamma < 1$: A hat zwei nicht reelle Eigenwerte
   Nullstellen des charakteristischen Polynoms 2.4:

   $$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{1 - \gamma^2}$$

   Es existieren zwei linear unabhängige Eigenvektoren, die zueinander komplex konjugiert gewählt werden können.