Übungen zum Ferienkurs Analysis II

Variationsrechnung und Kurven

3.1 Energieerhaltung bei der Variationsrechnung ⋆

Sei $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, $L \in \mathcal{C}^2$, die Lagrange-Funktion $L(x, v, t)$, $x, v \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, t_1]$, zum zu minimierenden Funktional $\mathcal{F}(x(.)) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t)dt$. Dann erfüllt jedes zweimal stetig differenzierbare Extremum von $\mathcal{F}$ mit den Endpunkten $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ Die Euler-Lagrange Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass bei zeitlicher Translationsinvarianz von $\mathcal{F}$ (d.h. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) die Energie

$$E(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v, t)v - L(x, v, t)$$

erhalten ist: Ist $\tilde{x}$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen, so ist $t \mapsto E(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))$ eine konstante Funktion. Was passiert, wenn $L(x, v, t)$ nur von t und x, bzw. nur von t und v abhängt?

(b) Wie lautet die Energiefunktion $E(x, v)$ für eine zeitunabhängige Lagrange-Funktion der klassischen Mechanik $L(x, v, t) = \frac{1}{2}m||v||^2 - V(x), x, v \in \mathbb{R}$?

Lösung

(a) Falls die Lagrange-Funktion $L(x, v, t)$ nicht explizit von t abhängt, $L(x, v, t) = \tilde{L}(x, v)$ so lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\partial_v \tilde{L}(x(t), \dot{x}(t)) - \partial_x \tilde{L}(x(t), \dot{x}(t)) = 0. \tag{1}$$

Für jede Lösung $x(t)$ hiervon ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(x(t), \dot{x}(t)) = &\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}(x(t), \tilde{x}(t))\right)\dot{x}(t) + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t))\ddot{x}(t)\\ &-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}(t) - \frac{\tilde{L}}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t))\ddot{x}(t)\\ = &\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t))\right)\dot{x}(t) = 0,\end{aligned}$$

also ist die Energiefunktion entlang Lösungen von 1 konstant.
Falls $L(x, v, t)$ nur von t und x abhängt, wird 1 zu $\partial_x L(x(t), t) = 0$.
Falls $L(x, v, t)$ nur von t und v abhängt, wird 1 zu $\partial_v L(\dot{x}(t), t) = \text{const}$.

(b) $E(x, v) = mv^T v - L(x, v, t) = \frac{1}{2}m||v||^2 + V(x)$

3.2 Brachistochrone (Kurve küzester Laufzeit)

Ein Massepunkt bewege sich entlang einer differenzierbaren Kurve $\gamma : [0, a] \to \mathbb{R}^n$ mit Geschwindigkeit $v(\gamma(\theta)) > 0$. Dann ist die Zeit zum Durchlaufen der Kurve gegeben durch

$$T(\gamma) = \int_0^a \frac{\|\gamma'(\theta)\|}{v(\gamma(\theta))}d\theta$$

Im Schwerefeld der Erde ist für ein anfangs ruhendes Teilchen mit $\gamma(0) = (0,0)$ die Geschwindigkeit gegeben durch $v(\gamma(\theta)) = \sqrt{(-g\gamma_2(\theta))}$ mit der Erdbeschleunigung g, wobei $\gamma_2(\theta) \leq 0$ vorausgesetzt wird. Der Endpunkt sei $\gamma(a) = (b,c)$ mit $b > 0, c < 0$.

(a) Sei γ durch seine negative y-Komponente parametrisiert, $\gamma(\theta) = (f(\theta), -\theta)$ wobei $a = -c$ gesetzt ist. Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für Kurven γ, die extremal bezüglich $T(\gamma)$ sind.

(b) Sei γ nun durch seine x-Komponente parametrisiert, $\gamma(\theta) = (\theta, g(\theta))$, wobei jetzt $a = b$ gewählt ist. Welche Differentialgleichung ergibt sich aus der Energieerhaltung?

Lösung

(a) In dieser Parametrisierung ist

$$T(\gamma) = \int_0^a \frac{\sqrt{1+f'(\Theta)^2}}{\sqrt{g\Theta}} d\Theta = \int_0^a L(f(\Theta), f'(\Theta), \Theta) d\Theta \tag{2}$$

mit der Lagrangedichte $L(x,v,\Theta) = \sqrt{\frac{1+v^2}{g\Theta}}$. Die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

wird hier gelöst durch die Funktionen $f(\Theta)$ mit $\frac{\partial L}{\partial v}(f(\Theta), f'(\Theta), \Theta) = const.$
Wegen $\frac{\partial L}{\partial v}(f(x,v,\Theta)) = \frac{v}{\sqrt{g\Theta(1+v^2)}}$ muss es ein $C \in \mathbb{R}$ geben mit

$$C\sqrt{g\Theta(1+f'(\Theta)^2)} = f'(\Theta), \tag{3}$$

wobei die Randbedingungen $f(0) = 0$ und $f(a) = b$ zu erfüllen sind.

(b) In der hier angegebenen Parametrisierung ist

$$T(\gamma) = \int_0^b \frac{\sqrt{1+g'(\Theta)^2}}{\sqrt{gg\Theta}} d\Theta = \int_0^b L(g(\Theta), g'(\Theta)) d\Theta \tag{4}$$

mit der Θ-unabhängigen Lagrange-Dichte $L(y,v) = \frac{1+v^2}{-gy}$. Eine so parametrisierte extremale Kurve erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichung und da L unabhängig von Θ ist, auch die Energieerhaltung

$$E(g(\Theta), g'(\Theta)) = \text{const.}$$

mit $E(y,v) = \frac{\partial L}{\partial v}(y,v)v - L(y,v) = \frac{v^2}{\sqrt{-gy(1+v^2)}} - \sqrt{\frac{1+v^2}{-gy}} = \frac{-1}{\sqrt{-gy(1+v^2)}}$. Das ergibt die Differentialgleichung

$$g(\Theta)(1+g'(\Theta)^2) = C'$$

mit einer Konstanten $C' \leq 0$ und den Randbedingungen $g(0) = 0; g(b) = c$.

3.3 Neilsche Parabel $\star$

Parametrisieren Sie die durch die Punktmenge $y^2 - x^3 = 0 \subset \mathbb{R}^2$ gegebene Kurve nach der Bogenlänge.

Lösung Eine mögliche Parametrisierung erhält man durch Auflösen nach x:

$$\gamma_1(y) = \begin{pmatrix} |y|^{\frac{2}{3}} \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R},$$

diese ist allerdings nicht differenzierbar bei $y = 0$.
Eine glatte Parametrisierung erhält man duch

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

diese ist allerdings singulär bei $t = 0$ ($\gamma_2'(0) = 0$). Davon ausgehend berechnen wir die Bogenlänge, zunächst für $T \geq 0$:

$$s(T) = \int_0^T ||\dot{\gamma}_2(t)||dt = \int_0^T \sqrt{4t^2 + 9t^4}dt = \left[\frac{1}{27}(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^T = \frac{1}{27}(4 + 9T^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}.$$

Für die Umkehrfunktion gilt $T(s)^2 = \frac{1}{9}[(27s + 8)^{\frac{2}{3}} - 4] = (s + \frac{8}{27})^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}$. Aus Symmetriegründen ist dann die Parametrisierung nach Bogenlänge für $s \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} T(|s|)^2 \\ \operatorname{sgn}(s)T(|s|)^3 \end{pmatrix}$$

3.4 Wegintegrale $\star$

Berechnen Sie jeweils das Wegintegral $\int_\gamma f(x)\mathrm{d}x$.

(i) $f(x, y) = (e^x, xy)$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$

(ii) $f(x, y) = (\sin(x), x^2 + y^2)$, $\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1) & \text{für } 1 < t \leq 2 \end{cases}$

(iii) $f(x, y, z) = (y, -z, x)$, $\gamma(t) = (\sinh(t), \cosh(t), \sinh(t)), 0 \leq t \leq \ln(2)$

(iv) $f(x, y, z) = (2z - \sqrt{x^2 + y^2}, z, z^2)$, $\gamma(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t), 0 \leq t, \leq 2\pi$

Lösung

(i)

$$\int_\gamma f(x, y)d(x, y) = \int_0^{2\pi} (e^{\cos(t)}, \cos(t)\sin(t)) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} -\sin(t)e^{\cos(t)} + \cos^2(t)\sin(t)dt$$

mit $\cos(t) = x \Rightarrow$

$$\int_{\cos(0)}^{\cos(2\pi)} e^x - x^2 dx = 0$$

(ii)

$$\int_\gamma f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 (\sin(t), t^2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} dt + \int_1^2 (\sin(1), 1+(t-1)^2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =$$

$$-\cos(1) + 1 + \int_1^2 t^2 - 2t + 2dt = -\cos(1) + \frac{7}{3}$$

(iii)

$$\int_\gamma f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_0^{\ln(2)} (\cosh(t), -\sinh(t), \sinh(t)) \cdot \begin{pmatrix}\cosh(t)\\ \sinh(t)\\ \cosh(t)\end{pmatrix} dt =$$

$$\int_0^{\ln(2)} \cosh^2(t) - \sinh^2(t) + \cosh(t)\sinh(t)dt = \int_0^{\ln(2)} 1 + \cosh(t)\sinh(t)dt$$

mit $\sinh(t) = x \Rightarrow$

$$\ln(2) + \int_0^{\frac{3}{4}} xdx = \ln(2) + \frac{9}{32}$$

(iv)

$$\int_\gamma f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} (2t-t, t, t^2) \cdot \begin{pmatrix}\cos(t) - t\sin(t)\\ \sin(t) + t\cos(t)\\ 1\end{pmatrix} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} t\cos(t)dt + \int_0^{2\pi} t\sin(t)dt + \int_0^{2\pi} t^2\cos(t)dt - \int_0^{2\pi} t^2\sin(t)dt + \int_0^{2\pi} t^2 dt$$

mit partieller Integration $\Rightarrow$

$$\frac{8}{3}\pi^3 + 4\pi^2 + 2\pi$$

3.5 Länge von Kurven $\star$

Berechnen Sie die Länge der folgenden Kurven:

(i) $\gamma_1(t) = (a\cos^3(t), a\sin^3(t))$ mit $0 \le t \le 2\pi, a > 0$ fest.

(ii) $\gamma_2(t) = (t^2, t^3)$ mit $0 \le t \le 4$.

Lösung

(i) $\gamma_1(t)$ ist stetig diffbarer Bogen mit $\gamma_1'(t) = (3a\cos^2 t(-\sin t), 3a\sin^2 t\cos t) \Rightarrow$

$$L(\gamma_1) = \int_0^{2\pi} ||\gamma_1'(t)||_2 dt = \int_0^{2\pi} (9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} |3a\cos t\sin t|(\cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} dt = 3a\int_0^{2\pi} |\cos t\sin t| dt$$

mit Additionstheorem $\Rightarrow$

$$3a\int_0^{2\pi} |\frac{1}{2}\sin 2t| dt = 3a\frac{1}{2}4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6a$$

(ii) $\gamma_2(t)$ ist stetig diffbarer Bogen mit $\gamma_2'(t) = (2t, 3t^2) \Rightarrow$

$$L(\gamma_2) = \int_0^4 ||\gamma_2'(t)||_2 dt = \int_0^4 (4t^2 + 9t^4)^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^4 t(4 + 9t^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

mit $\varphi(t) = 4 + 9t^2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{18} \int_0^4 (\varphi(t))^{\frac{1}{2}} \varphi'(t) dt = \frac{1}{18} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(4)} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{54} \Bigg|_4^{148} = \frac{1}{27}(148^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}})$$

3.6 Flächeninhalt der Kardioide ⋆

Sei $a > 0$ und $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}_0^+$ die Parametrisierung der Kardioide in Polarkoordinaten,

$$r(\phi) = a(1 + \cos\ \phi).$$

Berechne den Flächeninhalt der Kardioide.

Lösung Der von einer Kurve in Polarkoordinaten $r(\phi)$ eingeschlossene Flächeninhalt lautet:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^r dr' \int_0^{2\pi} d\phi\, r'(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(\phi)^2 d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a(1 + \cos\phi))^2 d\phi \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi) d\phi = \frac{a^2}{2} \left(\int_0^{2\pi} d\phi + 2 \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi + \int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \left(2\pi + 2[\sin\phi]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \left[\phi + \frac{1}{2} \sin(2\phi) \right]_0^{2\phi} \right) = \frac{3\pi}{2} a^2 \end{aligned}$$

3.7 Krümmung einer Klothoide

Zeigen Sie, dass die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(\frac{u^2}{2}) du \\ \int_0^t \sin(\frac{u^2}{2}) du \end{pmatrix}$$

an der Stelle $t > 0$ gleich ihrer Länge $L(t)$ ist.
Hinweis: Die Krümmungsformel lautet

$$\kappa = \left| \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \right|, \text{ wobei } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

.

Lösung Sei $t > 0$. Wir berechnen zuerst die Krümmung mit der Formel aus dem Hinweis.

$$\dot{x}(t) = \cos\frac{t^2}{2},\ \ddot{x}(t) = -t\sin\frac{t^2}{2}$$

$$\dot{y}(t) = \sin\frac{t^2}{2},\ \ddot{y}(t) = t\cos\frac{t^2}{2}$$

Einsetzen ergibt: $\kappa(t) = t$
Die Länge berechnet sich aus

$$L(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(u)| du = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2} du = t.$$