Übungen zum Ferienkurs Analysis II

Variationsrechnung und Kurven

3.1 Energieerhaltung bei der Variationsrechnung ⋆

Sei $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, $L \in \mathcal{C}^2$, die Lagrange-Funktion $L(x, v, t)$, $x, v \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, t_1]$, zum zu minimierenden Funktional $\mathcal{F}(x(.)) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t)dt$. Dann erfüllt jedes zweimal stetig differenzierbare Extremum von $\mathcal{F}$ mit den Endpunkten $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ Die Euler-Lagrange Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass bei zeitlicher Translationsinvarianz von $\mathcal{F}$ (d.h. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) die Energie

$$E(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v, t)v - L(x, v, t)$$

erhalten ist: Ist $\tilde{x}$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen, so ist $t \mapsto E(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))$ eine konstante Funktion. Was passiert, wenn $L(x, v, t)$ nur von t und x, bzw. nur von t und v abhängt?

(b) Wie lautet die Energiefunktion $E(x, v)$ für eine zeitunabhängige Lagrange-Funktion der klassischen Mechanik $L(x, v, t) = \frac{1}{2}m||v||^2 - V(x), x, v \in \mathbb{R}$?

3.2 Brachistochrone (Kurve küzester Laufzeit)

Ein Massepunkt bewege sich entlang einer differenzierbaren Kurve $\gamma : [0, a] \to \mathbb{R}^n$ mit Geschwindigkeit $v(\gamma(\theta)) > 0$. Dann ist die Zeit zum Durchlaufen der Kurve gegeben durch

$$T(\gamma) = \int_0^a \frac{\|\gamma'(\theta)\|}{v(\gamma(\theta))} d\theta$$

Im Schwerefeld der Erde ist für ein anfangs ruhendes Teilchen mit $\gamma(0) = (0, 0)$ die Geschwindigkeit gegeben durch $v(\gamma(\theta)) = \sqrt{(-g\gamma_2(\theta))}$ mit der Erdbeschleunigung g, wobei $\gamma_2(\theta) \leq 0$ vorausgesetzt wird. Der Endpunkt sei $\gamma(a) = (b, c)$ mit $b > 0, c < 0$.

(a) Sei γ durch seine negative y-Komponente parametrisiert, $\gamma(\theta) = (f(\theta), -\theta)$ wobei $a = -c$ gesetzt ist. Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für Kurven γ, die extremal bezüglich $T(\gamma)$ sind.

(b) Sei γ nun durch seine x-Komponente parametrisiert, $\gamma(\theta) = (\theta, g(\theta))$, wobei jetzt $a = b$ gewählt ist. Welche Differentialgleichung ergibt sich aus der Energieerhaltung?

3.3 Neilsche Parabel ⋆

Parametrisieren Sie die durch die Punktmenge $y^2 - x^3 = 0 \subset \mathbb{R}^2$ gegebene Kurve nach der Bogenlänge.

3.4 Wegintegrale ⋆

Berechnen Sie jeweils das Wegintegral $\int_\gamma f(x)\mathrm{d}x$.

(i) $f(x, y) = (e^x, xy)$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$

(ii) $f(x, y) = (\sin(x), x^2 + y^2)$, $\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1) & \text{für } 1 < t \leq 2 \end{cases}$

(iii) $f(x, y, z) = (y, -z, x)$, $\gamma(t) = (\sinh(t), \cosh(t), \sinh(t)), 0 \leq t \leq \ln(2)$

(iv) $f(x, y, z) = (2z - \sqrt{x^2 + y^2}, z, z^2)$, $\gamma(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t), 0 \leq t, \leq 2\pi$

3.5 Länge von Kurven ⋆

Berechnen Sie die Länge der folgenden Kurven:

(i) $\gamma_1(t) = (a\cos^3(t), a\sin^3(t))$ mit $0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$ fest.

(ii) $\gamma_2(t) = (t^2, t^3)$ mit $0 \leq t \leq 4$.

3.6 Flächeninhalt der Kardioide ⋆

Sei $a > 0$ und $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}_0^+$ die Parametrisierung der Kardioide in Polarkoordinaten,

$$r(\phi) = a(1 + \cos\ \phi).$$

Berechne den Flächeninhalt der Kardioide.

3.7 Krümmung einer Klothoide

Zeigen Sie, dass die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(\frac{u^2}{2})du \\ \int_0^t \sin(\frac{u^2}{2})du \end{pmatrix}$$

an der Stelle $t > 0$ gleich ihrer Länge $L(t)$ ist.
Hinweis: Die Krümmungsformel lautet

$$\kappa = \left| \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \right|, \text{ wobei } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

.