1 Variationsrechnung

1.1 Lagrange 2. Art

Wir führen die Überlegungen von gestern fort und wollen nun die Lagrangegleichungen 2. Art betrachten. Auch hier geht es um Extremalisierung unter Nebenbedingungen, nur, dass wir diesmal eine Funktion einer Funktion (=Funktional) extremalisieren.

Definition 1.1 (Wirkung) *Wir wollen die Kurvenverläufe $x(t)$ finden, die das Funktional F*

$$F(x) = \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{1}$$

unter den Randbedingungen minimal machen. Die Funktion L ist die Lagrange-Funktion. *Oft bezeichnet man F auch als Wirkung.*

Durch eine kurze Rechmnung erhält man als notwendige Bedingung um die Extrema zu finden, dass man die stationären Punkte von F durch Lösen Euler-Lagrangegleichungen erhalten kann. Diese lauten

Definition 1.2 (Euler-Lagrange Gleichungen)

$$\partial_x L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}} L(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$$

Wiederum sei betont, dass es sich nur um eine notwendige Bedingung handelt, eigentlich müsste, dann noch geprüft werden ob die erhaltenen Trajektorien x wirklich das Funktional F minimalisieren.
Führt man die totale Ableitung aus so erhält man

$$\partial_x L(x, \dot{x}, t) - \partial_x \partial_{\dot{x}} L(x, \dot{x}, t)\dot{x} - \partial_{\dot{x}}^2 L(x, \dot{x}, t)\ddot{x} - \partial_t \partial_x L(x, \dot{x}, t) = 0.$$

Dies ist nun eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit dem Randwertproblem $x(t_0) = x_0$ und $x(t_1) = x_1$.

1.2 Erhaltungsgrößen

Satz 1.1 (Noether-Theorem) *Zu jeder Symmetrie eines Systems gibt es eine Erhaltungsgröße. Exakter formuliert:*
Sei die Lagrange-Funktion L bis auf eine Konstante invariant unter der Transformation $x \mapsto X(t, x, s)$ d.h. für L gilt unter der Transformation $L(t, x, \dot{x}) = L(t, X, \dot{X}) +$

konst.. Dies ist gleichbedeutend damit, dass L nicht explizit von der Variablen s abhängt $\frac{d}{ds}L = 0 \quad \forall x, t$. *Dann ist die Größe*

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \left(\frac{d}{ds} X|_{s=0} \right)_k = konst.$$

eine Erhaltungsgröße, wobei die p_k *die Impulse zu den* $x_k \quad k \in \{1 \dots n\}$ *sind. Man nennt die Erhaltungsgröße auch erstes Integral.*

Beispiele:

- Translationsinvarianz $x \mapsto X = x + se_i \Leftrightarrow$ Impulserhaltung in p_i
- Rotationsinvarianz $\Leftrightarrow$ Drehimpulserhaltung
- Invarianz unter Zeittranslation $\Leftrightarrow$ Energieerhaltung

1.3 Beispiel: Variationsrechnung Pendel

Gegeben sei ein Funktional $F = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos\varphi \right) dt$ mit $l \in \mathbb{R}$ fest und den Randbedingungen $\varphi(0) = 0, \varphi(2) = \frac{\pi}{4}$.

(a) Wie lautet die Lagrange-Funktion zu diesem Problem?

(b) Geben Sie ein erstes Integral $E(\varphi, t)$ an.

(c) Wie lautet explizit die Euler-Lagrangegleichung für F?

Lösung

(a) Wegen $F(x) = \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$ lässt sich die Lagrangefunktion leicht ablesen $L(\varphi, \dot{\varphi}) = T - V = l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos\varphi$.

(b) Die Lagrangefunktion hängt nicht explizit von t ab, somit ist Zeittranslation eine Symmetrie und die Energie eine Erhaltungsgröße. $E = T + V = \frac{1}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos\varphi$.

(c) Wir berechnen die Euler-Lagrangegleichung für φ:

$$\begin{aligned} \partial_\varphi L(\varphi(t), \dot{\varphi}) - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{\varphi}} L(\varphi, \dot{\varphi}) &= 0 \\ -mgl \sin\varphi - \frac{d}{dt} \left(l^2 \dot{\varphi} \right) &= 0 \\ -mgl \sin\varphi - l^2 \ddot{\varphi} &= 0 \Leftrightarrow \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{mg}{l} \sin\varphi \end{aligned}$$

2 Kurvenintegrale und Vektorfelder

2.1 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Eine Kurve γ ist eine stetige Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \gamma(t)$. Die Kurve wird nur durch einen Freiheitsgrad parametrisiert. Dies ist nützlich um eine Bewegung mit einer Zwangsbedingung darzustellen (z.B. schwingendes Pendel, die Bewegung des Pendelkopfs ist durch die Länge des Pendels eingeschränkt).

Definition 2.1 (Tangentialvektor) *Der* Tangentialvektor $\boldsymbol{T}$ *für eine Kurve* γ *ist gegeben durch* $\frac{d}{dt}\gamma(t) = \gamma'(t)$*. Falls* $\gamma'(t) \neq 0$ *gilt, dann ist* $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ *der* Tangentialeinheitsvektor*.*

Definition 2.2 (Eigenschaften von Kurven) *Eine Kurve heißt* geschlossen*, wenn* $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$*.*
Die Länge *einer Kurve* L *wird durch*

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt$$

definiert.
Die Bogenlänge*, d.h. das entlang der Kurve zurückgelegte Wegstück* s *zum Zeitpunkt* t *ist gegeben durch*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(t')\| dt'.$$

Die Krümmung *der Kurve kann durch*

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\boldsymbol{T}(s)}{ds} \right\|$$

berechnet werden mit dem Tangentialeinheitsvektor $\boldsymbol{T}(s)$*.*

2.2 Kochrezept: Transformation nach Bogenlänge

1. Bogenlänge berechnen: $\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(t')\| dt'$
2. nach t auflösen: $s(t)$ umgestellt zu $t = f(s(t))$
3. in Kurve einsetzen: $\tilde{\gamma} : s \mapsto \gamma(f(s))$

2.3 Beispiel: Bogenlänge eines Pendels

Ein ideales Pendel der Länge l schwingt in einer Ebene. Die Bewegung des Pendels erfolgt auf einer Kurve γ charakterisiert durch den Winkel φ an der Pendelaufhängung

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} l \sin \varphi \\ l \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Wir transformieren dies nun nach der Bogenlänge s. Dazu berechnen wir zunächst γ'

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} l \cos \varphi \\ -l \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} s(\varphi) &= \int_0^{\varphi} \|\gamma'(\varphi')\| d\varphi' \\ &= \int_0^{\varphi} \sqrt{l^2 \cos^2 \varphi' + l^2 \sin^2 \varphi'} d\varphi' \\ &= \int_0^{\varphi} l d\varphi' = l\varphi \Leftrightarrow \\ \varphi &= \frac{s}{l} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $\tilde{\gamma}(s)$

$$\tilde{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} l \sin \frac{s}{l} \\ l \cos \frac{s}{l} \end{pmatrix}.$$

2.4 Beispiel: Krümmung einer Raumkurve

Parametrisieren Sie die Raumkurve

$$\gamma(t) = \tfrac{1}{2} e^t (\cos(t), \sin(t), \sqrt{2}), t \in \mathbb{R},$$

auf Bogenlänge, bezeichnet mit $\tilde{\gamma}(s)$, und berechnen Sie dafür die Krümmung $\kappa(s)$.

Lösung

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \frac{1}{2} e^t \left\| \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} e^t \sqrt{(\cos(t) - \sin(t))^2 + (\sin(t) + \cos(t))^2 + 2} = e^t$$

Also ist z. B. $\tilde{s}(t) = \int_{-\infty}^{t} \|\dot{\gamma}(t')\| dt' = \int_{-\infty}^{t} e^{t'} dt' = e^t$.
Mit $\tilde{t}(s) = \ln(s)$ ist also $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tilde{t}$ auf Bogenlänge parametrisiert, $s > 0$. Wir berechnen

nun den Tangentialeinheitsvektor

$$\boldsymbol{T}(s) = \frac{d\tilde{\gamma}(s)}{ds} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\ln s - \sin\ln s \\ \sin\ln s + \cos\ln s \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und erhalten damit für die Krümmung

$$\kappa(s) = \left\|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right\| = \frac{1}{2s}\left\|\begin{pmatrix} -\sin\ln s - \cos\ln s \\ \cos\ln s - \sin\ln s \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \frac{\sqrt{2}}{2s}.$$

2.5 Wegintegrale

Definition 2.3 (Gradientenfeld) *Eine Funktion $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Gradientenfeld, wenn sie sich als Gradient einer skalaren Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ darstellen lässt*

$$\boldsymbol{F}(x) := \nabla\Phi(x).$$

In der Physik hat man es bei der Berechnung von Arbeit mit einem Wegintegral zu tun (Arbeit = Ausgeübte Kraft entlang des Weges). Anstelle über Ortsvariablen zu integrieren unter Berücksichtigung der Kurve, können wir auch die Kurve parametrisieren (z.B. nach der Zeit oder einer anderen Größe) und stattdessen darüber integrieren. Die Transformation lautet folgendermaßen:

Definition 2.4 (Kurvenintegral von F entlang γ)

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}(r) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt. \tag{2}$$

Man beachte, dass es sich hierbei jeweils um Skalarprodukte zwischen $\boldsymbol{F}$ und $d\boldsymbol{r}$ bzw. $\gamma'(t)$ handelt.

Satz 2.1 (Wegunabhängigkeit) *Ist $\boldsymbol{F}$ ein Gradientenfeld des skalaren Potentials Φ, so gilt, dass das Integral von $\boldsymbol{F}$ über einen Weg γ nur von den Endpunkten abhängt und der Weg dazwischen irrelevant ist*

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \Phi(\gamma(t_1)) - \Phi(\gamma(t_0)).$$

Man bezeichnet $\boldsymbol{F}$ dann auch als wegunabhängig. Damit gilt für geschlossene Kurven γ

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = 0.$$

In der Physik bezeichnet man solche Kraftfelder $\boldsymbol{F}$ auch als konservative Kraftfelder, Φ nennt man das zu $\boldsymbol{F}$ gehörige Potential/ Potentielle Energie.

2.6 Beispiel: Wegintegral

Wir überprüfen die Gültigkeit des Satzes an dem Beispiel mit dem Pendel und berechnen die Arbeit um das Pendel von $\varphi = 0$ auf $\varphi = \frac{\pi}{2}$ auszulenken. Die Parametrisierung der Kurve lautet

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} l \sin \varphi \\ l \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Auf das Pendel der Masse m wirkt die Gravitationskraft

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

und damit berechnen wir das Wegintegral

$$\begin{aligned} \int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{F}(\gamma(\varphi)) \cdot \gamma'(\varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \cos \varphi \\ -l \sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} mgl \sin \varphi d\varphi \\ &= mgl \end{aligned}$$

Natürlich hätte man dies auch schneller mit

$$\Phi = -mgl \cos \varphi$$

und

$$\begin{aligned} \int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} &= \Phi(\gamma(\tfrac{\pi}{2})) - \Phi(\gamma(0)) \\ &= -mgl \cdot 0 + mgl \cdot 1 \\ &= mgl \end{aligned}$$

haben können.