# Übungen zum Ferienkurs Analysis II

## Topologie und Extrema

### 2.1 Eigenschaften von Mengen $\star$

Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen offen, abgeschlossen, zusammenhängend, kompakt sind (ohne Beweis).

- $\mathbb{R}^2$
- $[4, 7)$
- $[0, 1) \cup [2, 5]$
- $\{x \in \mathbb{R} | |x| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^4 + y^2 = 3\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | e^{x^2} = 3e^{-|y|}\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^4 + y^3 = 3\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^{10} > 3\}$

**Lösung**

- $\mathbb{R}^2$ (offen, abgeschlossen, zusammenhängend)
- $[4, 7)$ (zusammenhängend)
- $[0, 1) \cup [2, 5]$ (gar nichts)
- $\{x \in \mathbb{R} | |x| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (offen)
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$ (abgeschlossen, da es sich um das Urbild der Menge $\{0\}$ unter der stetigen Abbildung $f : \mathbb{R}^2\mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ handelt und die Menge $|0|$ abgeschlossen ist; zusammenhängend; nicht kompakt, da unbeschränkt)
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^4 + y^2 = 3\}$ (abgeschlossen, da es sich um das Urbild der Menge $\{3\}$ unter der stetigen Abbildung $f : \mathbb{R}^2\mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 + y^2$ handelt; zusammenhängend; kompakt nach Heine-Borel, da offensichtlich beschränkt)
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^4 + y^3 = 3\}$ (abgeschlossen, da es sich um das Urbild der Menge $\{3\}$ unter der stetigen Abbildung $f : \mathbb{R}^2\mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 + y^2$ handelt; zusammenhängend)
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | e^{x^2} = 3e^{-|y|}\}$ (abgeschlossen, da es sich um das Urbild der Menge $\{3\}$ unter der stetigen Abbildung $f : \mathbb{R}^2\mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{x^2+|y|}$ handelt; zusammenhängend; kompakt, da beschränkt $e^{x^2+|y|} = 3 \Leftrightarrow x^2 + |y| = \log 3$)
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^{10} > 3\}$ (offen, zusammenhängend)

### 2.2 Stetigkeit $\star$

Sei $X$, metrischer Raum, zusammenhängend und $f : X \to \mathbb{R}$ lokal konstant d.h. zu jedem $x \in X$ exisitiert eine Umgebung $x \in U \subset X$ so dass $f|_U$ konstant. Zeige: $f$ ist konstant. Geben Sie zudem ein Gegenbeispiel an, für den Fall, dass $X$ nicht zusammenhängend ist (eine lokal konstanten Funktion an, die nicht konstant ist).

**Lösung** Sei $z \in X$ und $A = \{x \in X | f(x) = f(z)\}$. Nach Voraussetzung ist $f$ lokal konstant, also ist $A$ offen. Die Menge $B := X \setminus A = \{x \in X | f(x) \neq f(z)\} = \{x \in X | f(x) < f(z)\} \cup \{x \in X | f(x) > f(z)\}$ ist auch offen und es gilt $X = A \cup B$. Da $X$ nach Voraussetzung zusammenhängend ist, muss gelten $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. Da aber $z \in A \Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow f$ konstant.

Als Gegenbeispiel wählen wir $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Diese Menge ist nicht zusammenhängend. Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ ist dann lokal konstant, aber nicht global konstant.

## 2.3 Kompaktheit

Sei $X$ kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen. Zeige: $A$ ist auch kompakt.

**Lösung** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $A$. Da $X$ kompakt ist, hat diese eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})$ in $A$. Der Grenzwert dieser Folge liegt wegen der Abgeschlossenheit von $A$ auch in $A$ und daraus folgt, dass $A$ kompakt ist.

## 2.4 Kompaktheit II

Sei $(x_n)_{b\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und $H$ die Menge aller Häufungspunkte der Folge. Weiterhin sei $A := \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup H$ die Menge der Folgenglieder und Häufungspunkte. Zeige: $A$ ist kompakt.

**Lösung** Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $A$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat diese eine konvergente Teilfolge in $\mathbb{R}^n$ da sie beschränkt ist. Diese Teilfolge kann entweder konstant sein oder gegen einen der Häufungspunkte der ursprünglichen Folge konvergieren d.h. sie hat also eine konvergente Teilfolge in $H \subset A \to A$ kompakt.

## 2.5 Lokale Extremwerte $\star$

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = y^3 - 3xy + x^2$

(a) Bestimmen Sie die beiden Punkte $(x_0, y_0)$ und $(x_1, y_1)$ mit grad $f(x,y) = 0$.

(b) Wie lautet die Hessematrix von $f$ im Punkt $(x_0, y_0)$ und $(x_1, y_1)$?

(c) Besitzt f in den Punkten $(x_0, y_0)$ und $(x_1, y_1)$ ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt?
Nimmt $f$ ein globales Maximum oder ein globales Minimum in den Punkten $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$?

**Lösung:**

(a) $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -3y + 2x \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$-3y + 2x = 0 \tag{1}$$

$$3y^2 - 3x = 0 \tag{2}$$

Aus 1 und 2 ergeben sich die beiden Punkte $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (\frac{9}{4}, \frac{3}{2})$.

(b) Die Hesse-Matrix von $f$ lautet: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(x_1,y_1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

(c)
- Bilden des charakteristischen Polynoms:

$$\det(H_f(x_0,y_0) - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 9 \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & (\lambda-1)^2 - 10 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda - 1 = \pm\sqrt{10} \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_{1,2} = \sqrt{10} + 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow H_f(x_0,y_0)$ indefinit $\Rightarrow (x_0,y_0)$ ist Sattelpunkt

- Bilden des charakteristischen Polynoms:

$$\det(H_f(x_1,y_1) - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(2-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 11\lambda + 9 \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & (\lambda-6,5)^2 - 33,25 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda - 6,5 = \pm\sqrt{33,25} \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 = \sqrt{33,25} + 6,5 \approx 12,27 \\ & \lambda_2 = -\sqrt{33,25} + 6,5 \approx 0,73 \end{aligned}$$

$\Rightarrow H_f(x_1,y_1)$ positiv definit $\Rightarrow (x_1,y_1)$ ist Minimum

- Die Punkte $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ sind keine globalen Extrema, da $f(x,y)$ unbeschränkt.
- Extrema können auch mithilfe der Hauptabschnittsdeterminanten klassifiziert werden:

| | positiv definit | negativ definit | indefinit | |
|---|---|---|---|---|
| $1 \times 1$-Matrix | + | - | + | - |
| $2 \times 2$-Matrix | + | + | - | - |

## 2.6 Extrema mit Nebenbedingungen I ⋆

Berechnen Sie diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

die von $(1,1,1)$ den kleinsten bzw. größten Abstand haben.

**Lösung:** Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
$Dg(x,y,z) = \nabla g(x,y,z) = 2(x,y,z) \neq (0,0,0)$,d.h. es genügt die kritischen Punkte der Lagrangeschen Hilfsfunktion zu bestimmen:

$$\nabla f(x,y,z) - \lambda \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zusammen mit der Nebenbedingung liefert dies das Gleichungssystem:

$$1 = (1-\lambda)x \tag{3}$$

$$1 = (1-\lambda)y \tag{4}$$

$$1 = (1-\lambda)z \tag{5}$$

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{6}$$

Aus 3 bis 5 folgt $x = y = z = (1-\lambda)^{-1}$, in 6 eingesetzt ergibt dies $\frac{3}{(1-\lambda)^2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Da die Nebenbedingungsmenge kompakt und $f$ stetig ist, existiert ein Minimum in

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

und ein Maximum in

$$p_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$

denn

$$f(p_1) = (1-\sqrt{3})^2 < (1+\sqrt{3})^2 = f(p_2).$$

## 2.7 Extrema mit Nebenbedingungen II

Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = 5x + y - 3z$ unter den Nebenbedingungen:

$$x + y + z = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

**Lösung:** Die Nebenbedingungensfunktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lautet

$$g_1(x,y,z) := x + y + z$$

$$g_2(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

Die Jacobi-Matrix

$$Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

hat in jedem Punkt der Nebenbedingungsmenge vollen Rang. Es genügt also die kritischen Punkte der Lagrangeschen Hilfsfunktion $F_{\lambda,\mu}(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g_1(x,y,z) - \mu g_2(x,y,z)$ zu finden:

$$\Rightarrow \nabla f(x,y,z) - \lambda \nabla g_1(x,y,z) - \mu \nabla g_2(x,y,z) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$$

$$0 = 5 - \lambda - 2\mu x \tag{7}$$
$$0 = 1 - \lambda - 2\mu y \tag{8}$$
$$0 = -3 - \lambda - 2\mu z \tag{9}$$
$$0 = x + y + z \tag{10}$$
$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \tag{11}$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem: 7+8+9 liefert mit 10, dass $\lambda = 1$. Daraus wird 7 und 8: $4 - 2\mu x = 0$ bzw. $-2\mu y = 0$. Deshalb ist $\mu \neq 0$ und $y = 0$.
Aus 9 und 11 folgt schließlich $z = -x$ und $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Da die Nebenbedingungsmenge kompakt und $f$ stetig ist, muss ein Minimum und ein Maximum existieren. $f$ hat also
ein Minimum in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -4\sqrt{2}$
und ein Maximum bei $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4\sqrt{2}$

## 2.8 Extrema mit Nebenbedingungen III

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = xy^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

**Lösung** Die Nebenbedingung lässt sich nach $y^2$ auflösen, d.h. es gilt $y^2 = 1 - x^2$. Die Extrema der Funktion $f$ unter der Nebenbedingung sind also genau die Extrema der Funktion $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x(1-x^2)$. Es gilt

$$\varphi'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

An diesen Stellen gilt $\varphi(\sqrt{\frac{1}{3}}) = \pm 2\frac{\sqrt{3}}{9}$. An den Rändern $\pm 1$ des Definitionsbereichs liegen ebenfalls lokale Extrema (bei 1 ein lokales Minimum, bei -1 ein lokales Maximum). Zusammen ergibt sich, dass $f$ bei $(\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$ und $(-1,0)$ ein lokales Maximum und bei $(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$ und $(1,0)$ ein lokales Minimum besitzt.