Übungen zum Ferienkurs Analysis II

Topologie und Extrema

2.1 Eigenschaften von Mengen $\star$

Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen offen, abgeschlossen, zusammenhängend, kompakt sind (ohne Beweis).

- $\mathbb{R}^2$
- $[4, 7)$
- $[0, 1) \cup [2, 5]$
- $\{x \in \mathbb{R} | |x| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^4 + y^3 = 3\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | e^{x^2} = 3e^{-|y|}\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^{10} > 3\}$

2.2 Stetigkeit $\star$

Sei X, metrischer Raum, zusammenhängend und $f : X \to \mathbb{R}$ lokal konstant d.h. zu jedem $x \in X$ exisitiert eine Umgebung $x \in U \subset X$ so dass $f|_U$ konstant. Zeige: f ist konstant. Geben Sie zudem ein Gegenbeispiel an, für den Fall, dass X nicht zusammenhängend ist (eine lokal konstanten Funktion an, die nicht konstant ist).

2.3 Kompaktheit

Sei X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen. Zeige: A ist auch kompakt.

2.4 Kompaktheit II

Sei $(x_n)_{b \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und H die Menge aller Häufungspunkte der Folge. Weiterhin sei $A := \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup H$ die Menge der Folgenglieder und Häufungspunkte. Zeige: A ist kompakt.

2.5 Lokale Extremwerte $\star$

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = y^3 - 3xy + x^2$

(a) Bestimmen Sie die beiden Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) mit grad $f(x, y) = 0$.

(b) Wie lautet die Hessematrix von f im Punkt (x_0, y_0) und (x_1, y_1)?

(c) Besitzt f in den Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt?
Nimmt f ein globales Maximum oder ein globales Minimum in den Punkten (x_0, y_0), (x_1, y_1)?

2.6 Extrema mit Nebenbedingungen I $\star$

Berechnen Sie diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

die von $(1, 1, 1)$ den kleinsten bzw. größten Abstand haben.

2.7 Extrema mit Nebenbedingungen II

Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

2.8 Extrema mit Nebenbedingungen III

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = xy^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.