1 Topologie

Topologie beschäftigt sich mit den Eigenschaften mathematischer Strukturen, die unter stetigen Abbildungen erhalten bleiben.

1.1 Wiederholung Analysis I

Den Begriff der Stetigkeit kennen wir bereits aus Analysis 1.

Definition 1.1 (Stetigkeit) *Sei $U \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_o \in U$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $\forall x \in U$ mit $|x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Wir können dies auch mit Folgen ausdrücken. f ist stetig, wenn für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k \in U$, die gegen x_0 konvergiert, die Folge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. Anders formuliert: es vertauscht die Grenzwertbildung mit der Abbildung

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = f(x_0).$$

1.2 Metrische Räume und Stetigkeit

In der Topologie können wir Stetigkeit auf Abbildungen zwischen metrischen Räumen verallgemeinern.

Definition 1.2 (Metrischer Raum) *Eine Funktion $d : M \times M \to [0, \infty)$ heißt* Metrik *auf der Menge M, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:*

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *("Definitheit")*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *("Symmetrie")*

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *("Dreiecksungleichung").*

Das Paar (M, d) heißt dann metrischer Raum.

Ein Beispiel für einen metrischen Raum ist $\mathbb{R}^n$ mit der von der euklidischen Norm induzierten Metrik

$$\|x - y\| = \left(\sum_{k=0}^{n} (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nun führen wir noch ein paar Begriffe und Eigenschaften ein. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt ...

- Offen: $\forall x \in U \;\; \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) = \{y \in M | d(x, y) < \varepsilon\} \subset U$
- Abgeschlossen: die komplementäre Menge $M \setminus U$ ist offen $\Leftrightarrow$ der Grenzwert einer konvergenten Folge aus der Teilmenge liegt auch in der Teilmenge

- Beschränkt: $\forall x, s \in U, \exists\ r \in \mathbb{R} : d(x, s) \leq r$
- Kompakt: jede Folge in U hat eine in U konvergente Teilfolge$\Leftrightarrow$ U ist abgeschlossen und beschränkt (Satz von Heine-Borel, gilt für $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$)
- Zusammenhängend: $\forall A, B \in M, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \neq X$

Definition 1.3 (Stetigkeit) *Seien X, Y metrische Räume. Dann ist eine Funktion $f : X \to Y$ bei $x \in X$ stetig, wenn*

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 : f\left(B_\delta(x)\right) \subset B_\varepsilon\left(f(x)\right) \Leftrightarrow \\
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 : \forall\ x' \textit{ mit } d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon
\end{aligned}$$

f heißt stetig wenn f $\forall x \in X$ stetig ist.

Diese Definition ist sehr ähnlich zu der Definition für reellwertige Funktionen.
Äquivalent kann man Stetigkeit auch über folgende Aussagen charakterisieren.

1. $\forall x \in X$ und alle Folgen mit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \to x$ gilt
$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x).$$
2. Urbilder offener Mengen sind offen: $U \subset Y$ offen $\to f^{-1}(U)$ offen in X
3. Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen

Bemerkungen:

- f heißt *Lipschitz stetig*, wenn $\exists\ L \in \mathbb{R} \quad \forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) < L\, d_X(x, x')$. Auch dies ist sehr ähnlich zur Analysis 1.
- f Lipschitz stetig $\Rightarrow$ stetig
- Für lineare Abbildungen: Lipschitz stetig $\Leftrightarrow$ stetig

Wichtige Aussagen für stetige Abbildungen

- Summen, Produkte und Verknüpfungen stetiger Abbildungen sind stetig.
- Urbilder offener/abgeschlossener Mengen sind offen/abgeschlossen.
- Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.
- Bilder kompakter Mengen sind kompakt.
- **Stetige Funktionen nehmen auf kompakten Mengen Maximum und Minimum an.** (Wichtig für Extremabestimmung!)

1.3 Beispiel

Seien X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig und surjektiv, X zusammenhängend. Zeigen Sie, dass Y zusammenhängend ist.

Lösung Wäre Y unzusammenhängend, so gäbe es nichtleere, offene Teilmengen $A, B \subset Y$ mit $A \cap B = \emptyset$ sodass $Y = A \cup B$. Dann ist $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ und

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = \emptyset.$$

Es gilt desweiteren $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$ offen da f stetig ist. Da X zusammenhängend nach Voraussetzung muss $f^{-1}(A) = \emptyset$ oder $f^{-1}(B) = \emptyset$ gelten. Aus der Surjektivität von f folgt dann $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset \to$ Widerspruch!

2 Extrema

In diesem Abschnitt sollen Extremwerte von Funktionen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diskutiert werden. Auch hier gibt es viele Ähnlichkeiten mit Extremwertbestimmung in der Analysis 1.

2.1 Definitionen

Generell sei in diesem Abschnitt $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ($D$ offen) eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Abbildung.

Definition 2.1 (Kritischer Punkt) *$x_0 \in D$ heißt* stationärer/kritischer Punkt *von f, wenn die Jacobi-Matrix die Nullmatrix ist beziehungsweise der Gradient die Nullabbildung ist d.h.*

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

Definition 2.2 (Hesse-Matrix) *Die* Hessematrix $H_f(x_0)$ *enthält alle zweifachen Ableitungen am Punkt x_0 und ist symmetrisch.*

$$(H_f(x_0))_{ij} = \partial_i \partial_j f(x_0)$$

Definition 2.3 (Extremum) *Sei $x_0 \in D$, so dass es eine Umgebung U von x_0 gibt, derart dass für*

$$x \in U : \begin{cases} f(x) < f(x_0) \\ f(x) \leq f(x_0) \\ f(x) > f(x_0) \\ f(x) \geq f(x_0) \end{cases} \quad \textit{gilt, so heißt } x_0 \begin{cases} \text{isoliertes lokales Maximum} \\ \text{lokales Maximum} \\ \text{isoliertes lokales Minimum} \\ \text{lokales Minimum} \end{cases} .$$

Ferner nennen wir x_0 Extremum.

Satz 2.1 (Bestimmung von Extrema) *Der stationäre Punkt x_0...*

- *ist ein isoliertes lokales Minimum, wenn die Hesse-Matrix positiv definit ist d.h. alle Eigenwerte von $H_f(x_0) > 0$.*
- *ist ein lokales Minimum, dann ist die Hesse-Matrix positiv semidefinit also alle Eigenwerte von $H_f(x_0) \geq 0$.*
- *ist ein isoliertes lokales Maximum, wenn die Hesse-Matrix negativ definit ist also alle Eigenwerte von $H_f(x_0) < 0$.*
- *ist ein lokales Maximum, dann ist die Hesse-Matrix negativ semidefinit also alle Eigenwerte von $H_f(x_0) \leq 0$.*
- *ist ein Sattelpunkt, wenn die Hesse-Matrix indefinit ist und es trifft keine der obigen Bedingungen zu d.h. es gibt sowohl Eigenwerte, die > 0 und Eigenwerte, die < 0 sind.*

Man beachte: die Definitheit oder Indefinitheit der Hesse-Matrix ist ein hinreichendes Kriterium, Semidefinitheit ist es nicht! **Auch wenn die Hesse-Matrix z.B. positiv semi-definit ist muss KEIN lokales Minimum vorliegen** (siehe dazu das Beispiel in 2.4). Wenn nur Semidefinitheit vorliegt, kann der Punkt *nicht* anhand der Hesse-Matrix klassifiziert werden, weitere Betrachtungen sind dann nötig. Im anderen Fall folgt z.B. aus einem lokalen isolierten Minimum nicht, dass die Hesse-Matrix positiv definit sein muss (siehe wiederum Beispiel in 2.4). Die Implikationen gelten jeweils nur in eine Richtung!

Um die Definitheit der Hesse-Matrix zu bestimmen muss man die Eigenwerte berechnen (vgl. Lineare Algebra). Dies geht, indem man die Gleichung für das charaktristische Polynom löst

$$\det\left(H_f(x_0) - \lambda\mathbb{1}\right) = 0.$$

Die Lösungen für λ sind gerade die Eigenwerte.

2.2 Rezept zum Auffinden von Extrema von $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1. Potentielle Extrema sind:
   - stationäre Punkte
   - nicht differenzierbare Punkte
   - Randpunkte
2. Im Inneren von D gilt: wenn $\bigtriangledown f(x) = 0$ und $f \in C^2$, dann ist $H_f(x)$ semidefinit, wenn bei x ein Extremum vorliegt. Aus $H > 0 \quad (H < 0)$ folgt Minimum (Maximum).

2.3 Beispiel: Extremalstellen

Sei $f(x, y) = 1 - x^3 - y^2 + x^3y^2$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Bestimmen und klassifizieren Sie die kritischen Punkte von f.

Lösung Wir bestimmen zuerst die kritischen Punkte.

$$0 = \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 + 3x^2y^2 \\ -2y + 2x^3y \end{pmatrix}.$$

Es muss also $x^2(1 - y^2) = 0$ und $y(1 - x^3) = 0$ erfüllt sein.
1. Fall: $x = 0$. Dann folgt aus der zweiten Gleichung $y = 0$.
2. Fall: $x \neq 0$. Dann folgt aus der ersten Gleichung $y = \pm 1$ und aus der zweiten $x = 1$.
Die Hessematrix von f ist

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x(y^2 - 1) & 6x^2y \\ 6x^2y & 2(x^3 - 1) \end{pmatrix}$$

- Da $f(x, 0) = 1 - x^3$, ist im Punkt $(0, 0)$ kein lokales Minimum oder Maximum, sondern ein Sattelpunkt (auch wenn die Hesse-Matrix an dieser Stelle negativ semidefinit ist).
- Wir berechnen die Eigenwerte von $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

  $$\begin{aligned} \det\left(H_f(x_0) - \lambda\mathbb{1}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ \lambda^2 - 36 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ \lambda = \pm 6. \end{aligned}$$

  Damit ist $H_f(1, 1)$ indefinit und $(1, 1)$ ein Sattelpunkt.

- $H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit (Eigenwerte ± 6), also ist $(1,-1)$ ein Sattelpunkt.

2.4 Beispiel: Extrema

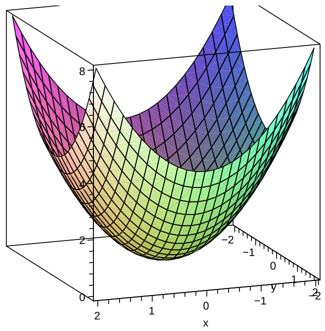
Wir betrachten die Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &:= x^2 + y^2 \\ f_2(x,y) &:= x^2 - y^2 \\ f_3(x,y) &:= x^2 \\ f_4(x,y) &:= x^2 + y^4 \\ f_5(x,y) &:= x^2 + y^3 \\ &. \end{aligned}$$

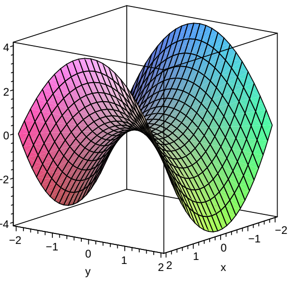
Alle Abbildungen besitzen $x_0 = 0$ als kritischen Punkt, für die Hessematrizen in $x_0 = 0$ gilt:

$$H_{f_1}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ H_{f_2}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ H_{f_3}(0) = H_{f_4}(0) = H_{f_5}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

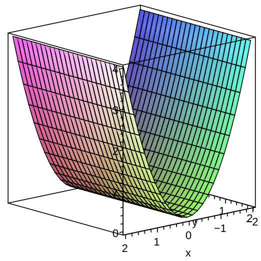
$H_{f_1}(0)$ ist positiv definit und daher hat f_1 ein isoliertes Minimum in 0; $H_{f_2}(0)$ ist indefinit und hat daher kein Extremum in 0 (man sagt hier auch 0 ist Sattelpunkt wegen der Form des Schaubilds). $H_{f_3}, H_{f_4}, H_{f_5}$ ist positiv semidefinit, man kann aus der Hessematrix nun aber keine Schlüsse ziehen. f_3 hat in 0 ein (nicht isoliertes) Minimum, f_4 in 0 isoliertes Minimum und f_5 kein Extremum. Vergleiche die Schaubilder in Abbildung 1!



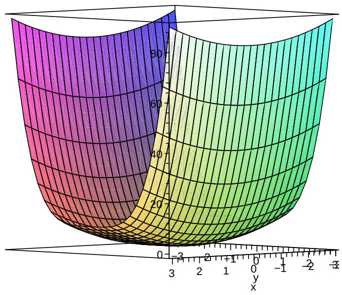
(a) Schaubild von f_1



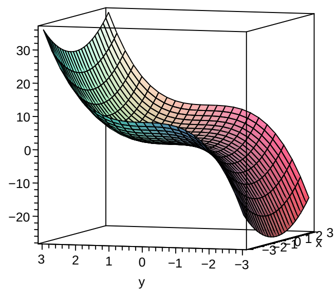
(b) Schaubild von f_2



(c) Schaubild von f_3



(d) Schaubild von f_4



(e) Schaubild von f_5

Abbildung 1: Plots der Beispiele

3 Extrema mit Nebenbedingung

Oft kommt es vor, dass man nicht einfach nur ein Minimum oder Maximum von einer Funktion finden möchte sondern ein Optimum unter einer bestimmten Bedingung erreichen möchte (z.B. der kürzeste Weg zwischen zwei Punkte, der über eine Kugelfläche führt). Wir wollen nun schauen, wie man eine solche Aufgabe lösen kann. Dies bezeichnet man als Extremalisierung unter Nebenbedingungen. Im Folgenden sei f eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und h eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die Funktion h bezeichnen wir als Nebenbedingung, wir suchen nun die Extremalstellen von f, sodass $h(x) = c$ gilt mit einer Konstante c.

3.1 Lagrange 1. Art

Um eine Lösung des Extremalproblems von f unter der Nebenbedingung $h(x) = c$ zu finden, können nur Punkte in Frage kommen, bei denen $h(x) = c$ tangential zu f verläuft. Auf einer solchen Tangentiale kann man nämlich die Werte so verändern, dass f maximal/minimal wird aber die Nebenbedingung immer erfüllt bleibt. Geometrisch bedeutet dies, dass die Gradienten von f unf h beim Maximum/Minimum parallele Vektoren sind, wobei der Gradient von h nicht verschwinden darf (siehe auch Abbildung 2).

$$\nabla f \propto \nabla h$$

Zur Lösung führen wir die Lagrange-Multiplikatoren λ ein und schreiben

$$\begin{aligned} \nabla f = -\lambda \nabla h \quad &\Leftrightarrow \\ \nabla f + \lambda \nabla h = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ \nabla (f + \lambda h) = 0 \end{aligned}$$

Das bedeutet also, wir suchen gerade die kritischen Punkte von $f + \lambda h$ mit den passenden λ. Die λ können wir erhalten indem wir die Nebenbedingung $h(x) = c$ zum Auflösen des Gleichungssystem nutzen. Damit haben wir das Problem der Extremalisierung unter Nebenbedingungen auf eine Problem der Extremalisierung *ohne* Nebenbedingung zurückgeführt und können die altbekannten Methoden für die Bestimmung von Extrema verwenden. **Man beachte: Wir erhalten damit die kritischen Punkte, diese sind aber nicht zwangsläufig Extrema!** Wir haben also nur eine notwendige Bedingung, nicht jeder kritische Punkt von $f + \lambda h$ wird das ursprüngliche Optimierungsproblem tatsächlich lösen. In der Physik bezeichnet man dieses Lösungsverfahren auch als Lagrangegleichungen 1. Art, die Zwangsbedingung/ Zwangskräfte werden so für die Lösung berücksichtigt.

3.2 Rezept für das Auffinden von Extrema unter Nebenbedingungen

1. Löse die k+n Gleichungen

$$\bigtriangledown f(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \bigtriangledown h_i(x)$$
$$h(x) = c$$

nach den $k + n$ Variablen (λ, x) auf. $\to$ Kandidaten für Extremalstellen

2. separate Betrachtung:
   - kritische Punkte
   - Punkte, an denen keine Differenzierbarkeit vorliegt
   - Punkte auf dem Rand
3. Bestimme Extrema unter den Kandidaten.
   Rechtfertige Existenz von Minima/Maxima durch Kompaktheitsargument.

3.3 Beispiel: Extrema mit Nebenbedingung

Sei $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion mit $g'(t) > 0$ für $t \geqq 0$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = g(||x||)$. Finden Sie die globalen Maxima und Minima von f unter der Nebenbedingung $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 5$.

Lösung Die Nebenbedingung kann geschrieben werden als $h(x) = 0$ mit $h(x) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - c$. Es gilt

$$\nabla h(x) = \begin{pmatrix} 10x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{1}$$

für $(x_1, x_2) \neq 0$. Insbesondere ist $\nabla h(x) \neq 0$ falls $h(x) = 0$.
Für einen Extremwert x von f unter der Nebenbedingung $h(x) = 0$ gilt

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla h(x) \tag{2}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $\nabla f(x) = g'(||x||)\frac{x}{||x||} \neq 0$ für $x \neq 0$, ist das gleichbedeutend mit

$$\nabla h(x) = \mu x, \tag{3}$$

wobei $\mu = \frac{g'(||x||)}{\lambda ||x||}$. Eingesetzt ergibt das die Eigenwertgleichung

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} x = \mu x, \tag{4}$$

mit den Lösungen

- $\mu = 2, x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\mu = 12, x = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

Dies sind die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix.
Damit die Nebenbedingung erfüllt ist, muss also gelten:

- $0 = h(\alpha, -2\alpha) = 5\alpha^2 - 8\alpha^2 + 8\alpha^2 - 5 = 5\alpha^2 - 5$, also $\alpha = \pm 1$
- $0 = h(2\alpha, \alpha) = 20\alpha^2 + 8\alpha^2 + 2\alpha^2 - 5 = 30\alpha^2 - 5$, also $\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

Die einzigen Kandidaten für Extremstellen sind also $x^{(1)} = (1, -2), x^{(2)} = -x^{(1)}$ und $x^{(3)} = \sqrt{6}(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}), x^{(4)} = -x^{(3)}$. Wegen $||x^{(1)}|| = ||x^{(2)}|| = \sqrt{5} > \sqrt{\frac{5}{6}} = ||x^{(3)}|| = ||x^{(4)}||$ ist $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) > f(x^{(3)}) = f(x^{(4)})$. Da die durch $h(x) = 0$ gegebene Menge kompakt ist, nimmt f Maximum und Minimum darauf an. Somit liegen bei $x^{(1,2)}$ die beiden absoluten Maxima und bei $x^{(3,4)}$ die beiden absoluten Minima.