1.1 Stetigkeit

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

Lösung Als rationale Funktion bzw. als Summe und Produkt stetiger Funktionen ist f außerhalb von $(0,0)$ stetig. Wir müssen noch die Stetigkeit im Nullpunkt zeigen. Beachte, dass für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{xy^2}{2xy} \right| = \left| \frac{y}{2} \right| .$$

Hierbei haben wir wieder aus der binomischen Formel verwendet, dass $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2xy \leq x^2+y^2$. Wir untersuchen nun die Stetigkeit mit dem $\epsilon - \delta$ Kriterium. Sei $\epsilon > 0$. Dann ist

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \left| \frac{y}{2} \right| \leq \frac{\|(x,y)\|}{2}$$

mit der euklidischen Norm. Wählen wir nun δ, sodass $\|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| < \delta = 2\epsilon$ folgt also

$$|f(x,y) - f(0,0)| < \epsilon$$

und damit ist die Stetigkeit im Punkt $(0,0)$ gezeigt.

1.2 Unstetigkeit

Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^6} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in keiner Umgebung um $(0,0)$ beschränkt ist und damit auf $\mathbb{R}^2$ nicht stetig ist.

Lšoung Wir nehmen nun das Folgenkriterium und betrachten die Folge (t^3, t), die für $t \to 0$ gegen $(0,0)$ konvergiert. Wir berechnen den Grenzwert der Funktionswerte der Folge

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f(t^3, t) &= \frac{t^5}{t^6 + t^6} \\ &= \frac{t^5}{2t^6} \\ &= \frac{1}{2t} \to \pm\infty \text{ für } t \to \pm 0.\end{aligned}$$

Die Folge der Funktionswerte divergiert und nimmt nicht den Wert $f(0,0) = 0$ an. Damit ist f bei $(0,0)$ nicht stetig (auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dagegen schon).