1 Differentialrechnung

1.1 Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}$

Zur Wiederholung betrachten wir die Definition für die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Alternativ kann die Ableitung auch als Zuwachs in linearer Ordnung definiert werden d.h. als lineare Funktion $f'(x_0)$ sodass f in einer Umgebung um x_0 durch

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h) \text{ mit } \frac{r(h)}{h} \to 0 \text{ für } h \to 0$$

dargestellt werden kann.

1.2 Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^n$

Ähnlich wie in 1D bezieht sich die Definition auf eine lineare Approximierbarkeit:

Definition 1.1 (Differenzierbarkeit) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}^m$. f heißt* (total) differenzierbar *im Punkt x_0, falls eine lineare Abbildung $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert sodass*

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\|f(x_0 + \Delta) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta\|}{\|\Delta\|} = 0.$$

Ist f für alle $x \in U$ differenzierbar so heißt f total differenzierbar *und man nennt f' die* Ableitung *von f oder auch* totales Differential.

Bemerkungen:

- Die Norm wird hier zum Vergleich der Ähnlichkeit zwischen Approximation und Funktion benutzt. Dies war in 1D nicht explizit notwendig. Diese Definition kann einfach auf Abbildungen zwischen Banachräume verallgemeinert werden bei Verwendung der zugehörigen Norm. Dabei muss man zusätzlich fordern, dass die lineare Abbildung f' beschränkt ist (im $\mathbb{R}^n$ automatisch erfüllt).

- Existiert die Ableitung, so ist sie auch eindeutig.

- Eine lineare Abbildung kann immer durch eine Matrix dargestellt werden. Die Matrix, die $f'(x_0)$ repräsentiert, nennt man auch *Jacobi-Matrix*.
- Ist f differenzierbar in x_0, so ist f dort auch stetig.
- Es gelten wie in 1D Summenregel, Produktregel und Kettenregel. Man beachte allerdings die genaue Reihenfolge bei der Kettenregel.
- f ist stetig differenzierbar, wenn die Ableitung an jedem Punkt $x_0 \in U$ existiert und stetig ist.

Definition 1.2 (Richtungsableitung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und*

$$f : U \to \mathbb{R}^m$$

$$(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

eine Funktion. Für $t \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Funktion $t \mapsto f(x+tv)$. Dann ist die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ gegeben durch

$$\partial_v f(x) = \frac{d}{dt} f(x + tv)|_{t=0} = f'(x)v.$$

Die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ ist also gerade die Projektion der Ableitung $f'(x)$ auf die Richtung v oder anders gesagt genau die Komponente, die in Richtung v zeigt. Wählen wir als Richtung die Koordinatenachse e_i für $i \in 1, ..., n$ erhalten wir die partiellen Ableitung von f in x_i. Dabei behandeln wir die Funktion effektiv wie eine 1-dimensionale Funktion mit einer Variablen x_i mit allen anderen $x_{j \neq i}$ fest.

Definition 1.3 (partielle Differentiation) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.*

- *f heißt* partiell differenzierbar *im Punkt $x \in U$, falls der Limes*

  $$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = \partial_{x_j} f(x)$$

  existiert für alle Richtungen, also für $j = 1, ..., n$.

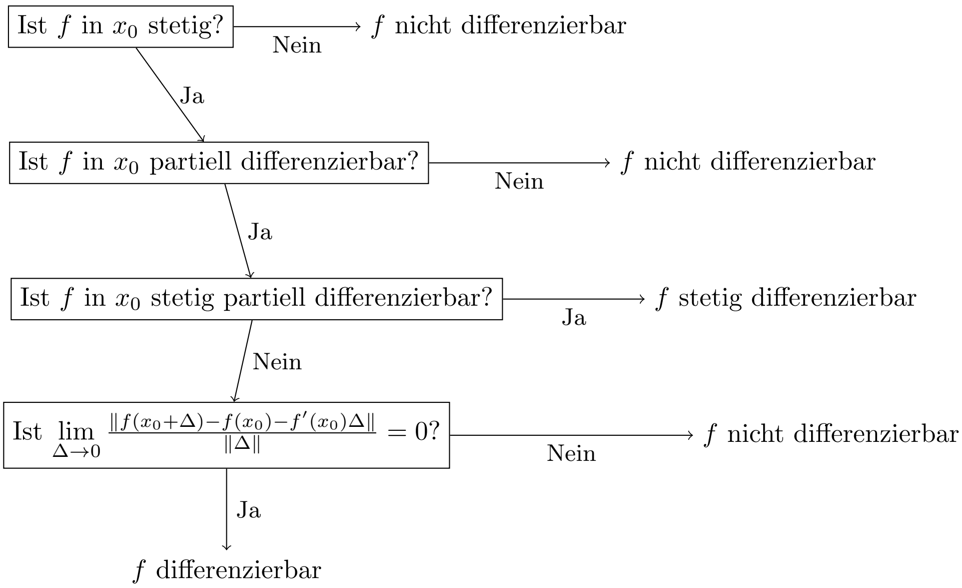
- *f heißt* partiell differenzierbar*, falls f partiell differenzierbar ist für alle $x \in U$.*

- *f heißt* stetig partiell differenzierbar *im Punkt $x \in U$, falls die Abbildungen $x \mapsto \partial_{x_j} f(x)$ stetig auf U sind für j= $1, ..., n$.*

Wichtige Zusammenhänge

1. f differenzierbar $\Rightarrow$ f partiell differenzierbar (Achtung: die Umkehrung gilt nicht!)
2. f stetig differenzierbar $\Leftrightarrow$ f stetig partiell differenzierbar

1.3 Kochrezept: Untersuchung auf Differenzierbarkeit



1.4 Höhere Ableitungen

Wir können auch genau wie in 1D höhere Ableitungen bilden und mehrere Variablen dabei mischen (Beispiel: $\partial_x \partial_y f(x,y)$). Prinzipiell ist die Reihenfolge dieser Ableitungen wichtig, sind allerdings bestimmte Voraussetzungen erfüllt vertauschen die Ableitungen. Diese Aussage trifft der folgende Satz

Satz 1.1 (Satz von Schwarz) *Sei f mindestens 2 mal stetig differenzierbar so vertauschen zwei beliebige Ableitungen d.h.: $\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$. Analog auch für höhere Ableitungen.*

1.5 Beispiele

1.5.1 Partielle und totale Differenzierbarkeit

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ falls } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ sonst} \end{array} \right\}$$

definiert ist. Weisen Sie nach, dass f überall total differenzierbar ist.

Lösung Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Es bleibt die Betrachtung der Differenzierbarkeit im Punkt$(x,y) = (0,0)$. Für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_x f((0,0)) &= \lim_{(h,0)\to(0,0)} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{(h,0)\to(0,0)} \frac{f(h,0)}{h} \\ &= \lim_{(h,0)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3}{\sqrt{h^2}}}{h} = \lim_{(h,0)\to(0,0)} h \\ &= 0 \end{aligned}$$

und analog

$$\partial_y f(0,0) = 0.$$

Falls f differenzierbar an $(0,0)$ ist, ist $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Eindeutigkeit). Dies gilt es zu überprüfen:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \lim_{\Delta\to 0} \frac{\|f(\Delta) - f(0,0) - f'(0,0)\Delta\|}{\|\Delta\|} \\ &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\|f(\Delta)\|}{\|\Delta\|} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\frac{\Delta_1^3}{\|\Delta\|}}{\|\Delta\|} \\ &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta_1^3}{\|\Delta\|^2} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta_1^3}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2} \\ &\underbrace{\leq}_{\text{da } \Delta_i^2 \geq 0} \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta_1^3}{\Delta_1^2} \\ &= \lim_{\Delta\to 0} \Delta_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hier wurde die euklidische Norm verwendet. Also ist f auch in $(0,0)$ total differenzierbar und somit überall total differenzierbar.

1.5.2 Differenzierbarkeit einer Matrixfunktion

Sei $f : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ Abbildung zwischen dem Raum der $n \times n$-Matrixen mit Einträgen in $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$A \mapsto A^2.$$

Zeige: f ist differenzierbar.

Lösung Bei Matrixfunktionen muss immer der Differenzenquotient mit einer kleinen Änderung in Form einer Matrix Δ verwendet werden. Es gilt $f(A + \Delta) - f(A) = (A + \Delta)^2 - A^2 = \Delta^2 + A\Delta + \Delta A$. Hieraus lässt sich das Differential $f'(A)$ ablesen $B \mapsto BA + AB$ (Eindeutigkeit). Dass dies tatsächlich die richtige Lösung ist zeigen wir durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \lim_{\Delta \to 0} \frac{\|f(A + \Delta) - f(A) - f'(A)\Delta\|}{\|\Delta\|} \\
&= \lim_{\Delta \to 0} \frac{\|\Delta^2\|}{\|\Delta\|} \\
&\leq \lim_{\Delta \to 0} \|\Delta\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit ist f differenzierbar.

2 Taylor-Reihenentwicklung

Aus der Analysis 1 ist bereits die Taylor-Entwicklung in einer Variablen bekannt. Diese kann man beinahe analog auch in mehreren Dimensionen konstruieren

$$f(x) = \sum_{|\alpha|\geq 0}^{p} \tfrac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha + R(p)$$

mit Restglied der Ordnung p. Mit dem Gradienten

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \dots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix}$$

und der Hessematrix

$$H_f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\partial_{x_1} f & \dots & \partial_{x_1}\partial_{x_n} f \\ & \dots & \\ \partial_{x_n}\partial_{x_1} f & \dots & \partial_{x_n}\partial_{x_n} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}(\nabla f)^T \\ \dots \\ \partial_{x_n}(\nabla f)^T \end{pmatrix}$$

lässt sich die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung um den Punkt x_0 für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kompakter schreiben.

$$f(x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x-x_0) + \tfrac{1}{2}(x-x_0)^T H_f(x_0)(x-x_0)$$

Die Taylorentwicklung lässt sich zwar recht einfach hinschreiben, allerdings kann die tatächliche Berechnung schnell in extrem viele Terme ausarten, da wir gerade bei den höheren Ableitungen alle Vertauschungen berücksichtigen müssen. Deshalb sollte man vermeiden diese Formel direkt ausrechnen. Stattdessen bietet es sich oft an bereits bekannte Reihen zu verwenden, besonders nützlich sind hier:

- Geometrische Summenformel

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ für } |x| < 1$$

- Binomischer Lehrsatz

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

- Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Ebenso kann man bekanntes Wissen über Eigenschaften einer Funktion an einem Punkt (insbesondere Extrema) benutzen zur Konstruktion der Taylorreihe. Bevor ihr euch also in wilde Rechenabenteuer stürzt, lest besser nochmal die Aufgabenstellung genau und überlegt, ob es nicht weniger rechenintensiv gehen könnte.

2.1 Beispiele

2.1.1 Konstruktion durch bekannte Potenzreihe

Man entwickele die Funktion $f(x,y) = \frac{y+1}{x^2+1}$ in eine Taylorreihe um den Punkt $(0,0)$ bis einschließlich Gliedern zweiter Ordnung.

Lösung Man benutze die geometrische Reihe um f umzuschreiben, dies geht da wir um $(0,0)$ entwickeln.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (y+1)\frac{1}{1+x^2} \\
&= (y+1)\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k \quad (|x|<1) \\
&= (y+1)\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}(-1)^k \\
&= 1 + y - x^2 + \dots
\end{aligned}$$

da wir Terme höherer Ordnung nicht berücksichtigen.

2.1.2 Konstruktion nach Zusatzinformationen

Gegeben sei eine Funtion $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^2)$ mit

$$f(0) = 3, \quad \partial_1^2 f(0) = \partial_1\partial_2 f(0) = -2, \quad \partial_2^3 f(0) = \partial_1^2\partial_2 f(0) = 1$$

Alle nicht angegebenen ersten, zweiten und dritten partiellen Ableitungen verschwinden im Nullpunkt. Wie lautet explizit die Taylorentwicklung bis zur dritten Ordnung von f am Ursprung?

Lösung Der Term nullter Ordnung ist gegeben. Der Gradient $\nabla f(0)$ ist gerade der Nullvektor $\Rightarrow$ Terme erster Ordnung fallen weg. Die Hessematrix lautet (Satz von Schwarz)

$$H_f(0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die dritten Ableitungen müssen wir auch wieder alle Terme mit allen Vertauschungen berücksichtigen (Satz von Schwarz). Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3 + \tfrac{1}{2}\left(-2x^2 - 2xy - 2yx\right) + \tfrac{1}{6}\left(y^3 + y^2x + yxy + xy^2\right) \\ &= 3 - x^2 - 2xy + \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{1}{2}xy^2. \end{aligned}$$