Ferienkurs Experimentalphysik 3

Übung

Qi Li, Bernhard Loitsch, Hannes Schmeiduch

Donnerstag, 08.03.2012

1 Schwarzer Körper

Außerhalb der Erdatmosphäre misst man das Maximum des Sonnenspektrums bei einer Wellenlänge von $\lambda = 465nm$

- a) Betrachten Sie die Sonne näherungsweise als schwarzen Strahler und bestimmen Sie die Oberflächentemperatur T_S der Sonne.

  Lösung:

  Mit dem Wienschen Verschiebungsgesetz erhält man sofort die Lösung für die gesuchte Temperatur:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

$$\rightarrow T = \frac{b}{\lambda_{max}} = 6237K$$

- b) Die vom Merkur ausgesandte Schwarzkörperstrahlung entspricht einer Temperatur von $_{TM} = 442.5K$. Bestimmen Sie den Abstand r des Merkurs von der Sonne unter der Annahme thermischen Gleichgewichts und eines kreisförmigen Orbits. Der Radius der Sonne beträgt $R_S = 6.96 \cdot 10^5 km$, der des Merkurs ist $R_S = 2439,7$. (Nehmen Sie an, dass die Oberfläche des Merkurs nicht reflektierend ist!)

Lösung:

Die abgestrahlte Leistung der Sonne beträgt nach dem Steffan-Boltzmann-Gesetz

$$P_S = 4\pi \cdot R_S^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4$$

mit σ als Stefan-Boltzmann-Konstante. Damit nun Gleichgewicht vorherrscht, muss die vom Merkus absorbierte Strahlungsleistung gleich seiner emittierten sein:

$$P_{abs} = P_S \cdot \frac{\pi R_M^2}{4\pi r^2} \stackrel{!}{=} 4\pi \cdot R_M^2 \cdot \sigma \cdot T_M^4 = P_{em}$$

Setzt man nun noch die Strahlungsleistung P_S der Sonne ein, muss nur noch nach r aufgelöst werden:

$$\frac{4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 \pi R_M^2}{4\pi r^2} = 4\pi R_M^2 \sigma T_M^4$$

$$\rightarrow r^2 = \frac{T_S^4}{T_M^4} \frac{R_S^2}{4}$$

$$r = 6,914 \cdot 10^{10} m$$

2 Schwarzer Strahler

Rote Zwerge haben typischer Oberflächentemperaturen zwischen 2500 K und 4000 K. Sie sind die häufigsten Sterne im Universum. Die Massen bewegen sich zwischen einigen Prozent und der Hälfte der Sonnenmasse. Ein typischer Vertreter ist "Gliese 876" in einer Entfernung von 15,2 Lichtjahren zu unserem Sonnensystem. Er hat eine Masse 0,32 Sonnenmassen, etwa 36% des Sonnendurchmessers und eine Oberflächentemperatur von 3000 K. Berechnen Sie unter der Annahme, dass der Stern wie ein perfekter Schwarzkörperstrahler strahlt:

- a) die gesamte emittierte Strahlungsleistung (in Watt) bei T=3000K

  Lösung Wir verwenden das Stefan-Boltzmann-Gesetz:

  $$R = \frac{P}{A} = \sigma T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \cdot (3000K)^4 = 4,59 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$$

  Wobei A die Oberfläche des Stern ist. Als Gesamtleistung P erhalten wir somit ungefähr:

  $$R \cdot 4\pi r^2 = 3,6 \cdot 10^{30} W$$

  Die Strahlungsleistung der Sonne beträgt übrigens etwa $3,8 \cdot 10^{26} W$.

- b) die Wellenlänge λ_{max}, bei der das Strahlungsspektrum $R(\lambda, T)$ einen Peak aufweist

  Lösung Die maximale Wellenlänge λ_{max} berechnet sich über das Wiensche Gesetz:

  $$\lambda_{max} = \frac{b}{T} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} Km}{3000K} = 967nm$$

- c) den Anteil der Energie, der im sichtbaren Bereich des elektromagnetischen Spektrums (400nm - 700nm) emittiert wird

  Lösung Der Bruchteil der Strahlung im sichtbaren Licht sei r:

  $$r = \frac{R_{Licht}}{R}$$

  Die Integration des Plankschen Strahlungsgesetzes über den sichtbaren Spektralbereich liefert den Wert für R_{Licht}:

  $$R_{Licht} = \int\limits_{300nm}^{700nm} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda$$

  Im Nenner können wir die 1 weglassen, da:

  $$\frac{hc}{\lambda k_B T} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} Js \cdot 3 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^{-7} m \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} J/K \cdot 3000K} = 6,8$$

  da $e^{6,8} \approx 900 \gg 1 \rightarrow e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \approx e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}$

  $$\rightarrow R_{Licht} = \int\limits_{300nm}^{700nm} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}} d\lambda$$

  Wir substituieren nun:

  $$\frac{hc}{\lambda k_B T} = x$$

  $$d\lambda = -\frac{hc}{k_B T x^2} dx$$

  $$\rightarrow R_{Licht} = -2\pi \frac{k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int\limits_{12}^{7} \frac{x^3}{e^x} dx$$

  Dieses Integral kann man mit folgender Formel lösen:

  $$\int x^n e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^{n+1}} \left((ax)^n - n(ax)^{n-1} + nn - 1(ax)^{n-2} - ... + (-1)^n n! \right)$$

  mit $n = 1, 2, 3$

  $$\rightarrow R_{Licht} = 2\pi \frac{k_B^4 T^4}{h^3 c^2} e^{-x} (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)_{12}^{7} = 0,3339 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$$

  $$\rightarrow r = \frac{R_{Licht}}{R} = 7,3\%$$

3 Compton Streuung

- a) Skizzieren Sie einen Versuchsaufbau zur Untersuchung des Comptoneffektes, beschriften Sie die Skizze und erläutern Sie knapp den Versuchsablauf. Bei einer Messung tritt unter dem Winkel $\delta = 90°$ Strahlung auf, deren Wellenlänge bei der Streuung verdoppelt wurde.

- b) Bestimmen Sie die Frequenz der einfallenden Strahlung

  Lösung:

  $$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - cos\theta)$$

  mit $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$ der Comptonwellenlänge

  $$\Delta\lambda = \lambda = \lambda_c(1 - cos(90^\circ)$$

  $$\rightarrow \lambda = \rightarrow_c$$

  $$f = \frac{c}{\lambda_c} = \frac{m_0}{h} Hz = 1,2 \cdot 10^{20} Hz$$

- c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des gestoßenen Elektrons.

  $$E = \frac{hc}{\lambda}$$

  $$\Delta E_\gamma = \frac{hc}{\lambda_c} - \frac{hc}{2\lambda_c} = \frac{hc}{2\lambda_c} = \frac{c^2 m_0}{2} = \frac{1}{2} \cdot 511keV$$

  $$\Delta E_\gamma = E_e \approx E \rightarrow \text{ relativistische Rechnung}$$

  $$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

  $$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{2}{3}, \beta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

  $$\rightarrow v \approx 2,2 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

- d) Berechnen Sie den Winkel ϵ, den die Flugrichtung des gestoßenen Elektrons mit der Richtung der Primärstrahlung einschließt

  Winkel $\delta = 90^\circ \rightarrow$ rechtwinkliges Dreieck

  $$\vec{p_\gamma} = \vec{p'}_\gamma + \vec{p'_e}$$

  $$tan\epsilon = \frac{\vec{p'_\gamma}}{\vec{p_\gamma}} = \frac{\lambda}{2\lambda} = \frac{1}{2}$$

  $$\rightarrow \epsilon = 27^\circ$$

4 Photoeffekt

Blaues Licht der Wellenlänge $\lambda = 430nm$ falle auf eine Photozelle, deren lichtelektrische Schicht eine Quanteneffizienz von $\eta = \frac{N_e}{N_{ph}} = 0,14$.

- a) Wie groß ist die Strahlungsleistung des auf die Photozelle fallenden blauen Lichts, wenn ein maximaler Photoelektronenstrom von 0,5mA fließt?

  Lösung:

Maximaler Photostrom bedeutet, dass alle freigeschlagenen Elektronen die Kathode erreichen. Wir nutzen $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, $E = h\nu$, $N_e = \eta N_{ph}$, $N_e = \frac{\Delta Q}{e}$ Es gilt

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{N_{ph} E_{ph}}{\Delta t} = \frac{N_e E_{ph}}{\eta \Delta t} = \frac{h\nu I}{\eta e} = \frac{hcI}{\eta e \lambda} \approx 1 \cdot 10^{-2} W$$

- b) Welche Austrittsarbeit W_A hat das Material der lichtelektrischen Schicht, wenn durch ein Gegenfeld der Spannung $U = 0,94V$ der Strom vollständig unterdrückt werden kann?

  Lösung:

  Hier können selbst die energiereichsten Elektronen die Kathode nicht erreichen

  $$E = eU = h\nu - W_A$$

  umstellen liefert

  $$W_A = \frac{hc}{\lambda} - eU \approx 1,94eV$$

- c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Photoelektronen wenn keine Gegenspannung angelegt ist.

  Lösung:

  Da die Ruheenergie von Elektronen deutlich höher ist als die verwendete Strahlungsenergie, können wir klassisch rechnen.

  $$E = \frac{hc}{\lambda} - W_A = \frac{1}{2} m v^2$$

  auflösen nach der Geschwindigkeit liefert

  $$v = \sqrt{\frac{2(\frac{hc}{\lambda} - W_A)}{m}} \approx 5,8 \cdot 10^5 m/s$$

- d) Ab welcher Wellenlänge tritt kein Strom auf, wenn sie annehmen, dass die lichtelektrische Schicht aus Cäsium besteht, dessen Austrittsarbeit $W_A = 2,14eV$ beträgt?

  Lösung:

  Hier muss die Photonenenergie kleiner als die Austrittsarbeit sein.

  $$E = \frac{hc}{\lambda} \leq W_A$$

  daraus folgt

  $$\lambda \geq \frac{hc}{W_A} \approx 579nm$$

5 Oberflächentemperatur

- a) Außerhalb der Erdatmosphäre misst man das Maximum des Sonnenspektrums bei $\lambda = 465nm$. Berechnen sie daraus die Oberflächentemperatur der Sonne.

  Lösung:

  Wir nutzen das Wiensches Verschiebungsgesetz und lösen nach der Temperatur auf:
  $$T = \frac{0,2898cm \cdot k_B}{465nm} \approx 6232K$$

- b) Tatsächlich ist die Oberflächentemperatur $T_S = 5700K$. Berechnen sie nun die Oberflächentemperatur der Erde. Nehmen sie dazu an, dass die Erde ein schwarzer Körper im thermischen Gleichgewicht ist. Die Temperatur der Erde werde Tag und Nacht gleich angeommen.

  Lösung:

  Hier können wir das Stefan-Boltzmann-Gesetz nutzen. Wir verwenden außerdem $A_{E,\circ} = \pi r_E^2$, $A_S = 4\pi r_S^2$, $A_E = 4\pi r_E^2$, $A_K = 4\pi R^2$. R ist hier der Abstand zwischen Erde und Sonne, $A_{E,\circ}$ die bestrahlte Erdoberfläche als Kreis. Für die Strahlungsleistung der Sonne gilt:
  $$P_S = \sigma A_S T_S^4$$
  Daraus folgt für die Intensität
  $$I_S = \frac{P_S}{A}$$
  Damit können wir die auf der Erde eingehende Strahlungsleistung bestimmen:
  $$P_E = I \cdot A_K = \sigma A_E T_E^4$$
  Der letzte Schritt ist durch das thermische Gleichgewicht begründet, da hier die absorbierte Strahlungs der abgestrahlten Leistung entsprechen muss. Durch Umformen erhalten wir
  $$T_E = T_S \cdot \sqrt{\frac{A_S \cdot A_{E,\circ}}{A_K \cdot A_E}} = T_S \cdot \sqrt{\frac{r_S}{2R}} \approx 275K$$