Lösungsvorschlag Probeklausur

1) Zu zeigen: Für $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ konvergiert die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ absolut.

Lässt sich mit dem Quotientenkriterium zeigen: Es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{z^k}\right| = |z| \frac{1}{|k+1|}$$

Dann gilt für alle $|z| \leq M < \infty$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{M}{k+1} = 0 =: q < 1$$

Damit konvergiert die Reihe absolut nach dem Quotientenkriterium.

2) Real- und Imaginärteile von z

a) $$z = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$\mathrm{Im}(z) = -\frac{b}{a^2+b^2}$ $\quad$ $\mathrm{Re}(z) = \frac{a}{a^2+b^2}$

b) $$z = \frac{(1-i)^2}{(1+i)^3} = \frac{(1-i)^2(1-i)^3}{(1+i)^3(1-i)^3} = \frac{(1-i)^5}{2^3}$$

$|1-i| = \sqrt{2}$ $\quad$ $\tan(\varphi) = \frac{1}{1}$ $\quad$ $1-i = \sqrt{2}e^{i\pi\frac{7}{4}}$

$$(1-i)^5 = (\sqrt{2})^5 e^{i\pi\frac{35}{4}} = \sqrt{2}\cdot 4\, e^{i\pi\frac{3}{4}} \underbrace{e^{i8\pi}}_{=1} = \sqrt{2}\,4\, e^{i\pi\frac{3}{4}}$$

$$z = \frac{2^{5/2}}{2^3} e^{i\pi\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$$

c) $z^2 = 4 + 4i \qquad zz^* = r^2 = 4^2 + 4^2 = 32$

$$r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\tan\varphi = \frac{4}{4} = 1 \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$z^2 = 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i2\pi k}$$

$$z = \left(4\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i2\pi k}\right)^{1/2} = 2\left(2^{1/4}\right) e^{i\frac{\pi}{8} + i\pi k}$$

$k = 0,1$ liefern die Lösungen.

$z_1 = 2^{5/4} e^{i\frac{\pi}{8}} \qquad z_2 = 2^{5/4} e^{i\frac{9\pi}{8}}$ Sind die beiden Lösungen.

3 a) Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

zu zeigen.

Die Reihenglieder sind von einer Form, die es als aussichtsreich erscheinen läßt, eine endliche Partialsumme

$$s_m = \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)}$$

als Teleskopsumme zu schreiben.

Die Konvergenz der Reihe läßt sich bei Gelingen dann als Konvergenz der Folge der Partialsummen zeigen.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{(n-1)\,n} = \frac{1}{(n-1)(n)}$$

Damit gilt für die m-te Partialsumme

$$s_m = \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=2}^{m} \left[\frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k}\right] =$$

$$= \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{m}$$

$$= 1 - \frac{1}{m}$$

Dann gilt $\lim_{n \to \infty} s_m = 1$. Da die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert, konvergiert die Reihe mit Grenzwert

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = 1 \quad .$$

b) Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{zu zeigen.}$$

Es gilt $\left|\frac{1}{k^2}\right| = \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ für alle $k \geq 2$

(da $(k-1) < k$)

Damit ist $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ eine Majorante von $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Da die Majorante konvergiert, konvergiert auch $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ sich nur um einen Term unterscheiden, konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ nach dem Majorantenkriterium.

c) Konvergenz mittels Quotientenkriterium?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 1 = q.$$

Da $q = 1$, ist die notwendige Bedingung $q<1$ für die Konvergenz nach dem Quotientenkriterium nicht erfüllt.

4) Stetigkeit

a) $f: [0,\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sqrt{x}$

Zu zeigen: f ist gleichmäßig stetig auf $[0,\infty)$.

Dazu ist zu zeigen: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x - x'| < \delta$$

für alle $x, x' \in [0,\infty)$.

Ansatz:

$$|f(x) - f(x')| = |\sqrt{x'} - \sqrt{x}| \overset{\text{Angabe}}{\leq} \sqrt{|x-x'|} \overset{!}{<} \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $|x - x'| < \varepsilon^2$ führt auf $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$,

daher existiert $\delta = \varepsilon^2$ und ist für alle $x, x' \in [0,\infty)$ konstant.

Es gilt also:

$$|x - x'| \leq \delta = \varepsilon^2 \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$ unabhängig von $x, x' \in [0,\infty)$. Damit ist $f(x)$ gleichmäßig stetig auf $[0,\infty)$.

b) (vgl. Übung H27)

zu zeigen: $f(x) = \sqrt{x}$, $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist nicht Lipschitz-stetig.

Lipschitz-stetig: Für alle $x, x' \in [0,\infty)$ gibt es ein $L \geq 0$, so dass gilt $|f(x) - f(x')| \leq L\,|x - x'|$

Das setzt insbesondere voraus, dass die Steigung von $f(x)$ beschränkt ist. Da $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x \to 0$ divergiert, wissen wir, dass die Steigung von $f(x)$ dort nicht beschränkt ist. Also untersuchen wir die Umgebung von $x = 0$, um zu zeigen, dass $f(x)$ nicht Lipschitz-stetig ist.

(Wenn wir zwei Punkte x, x' immer näher an $x = 0$ heranführen, muss die Lipschitz-Bedingung sicher verletzt werden)

Angenommen also, $f(x)$ sei Lipschitz-stetig mit

$$|f(x) - f(x')| \leq L\,|x - x'|.$$

Dann gilt das auch für $x = \frac{1}{n^2}$ und $x' = \frac{4}{n^2}$

$$\left|f\left(\frac{1}{n^2}\right) - f\left(\frac{4}{n^2}\right)\right| \leq L\left|\frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^2}\right|$$

$$\left|\sqrt{\frac{1}{n^2}} - \sqrt{\frac{4}{n^2}}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{2}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq L\left|\frac{3}{n^2}\right| = L\,\frac{3}{n^2}$$

Dann gilt $\frac{n^2}{3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n}{3} \leq L$ und für $n \to \infty$ muss L unbegrenzt wachsen, damit die Bedingung erfüllt werden kann. Damit ist L keine Konstante, und damit gibt es kein festes $L \geq 0$, so dass die Bedingung erfüllt ist.

Damit ist $f(x)$ nicht Lipschitz-stetig auf $[0,\infty)$.

5) Zu zeigen: $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ist stetig in $x_p = -1$.

Zu zeigen: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass aus

$|x - x_p| < \delta$ folgt dass $|f(x) - f(x_p)| < \varepsilon$.

$$|f(x) - f(x_p)| = \left| \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{x_p-1}{x_p^2+1} \right| = \left| \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{-2}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{x-1}{x^2+1} + 1 \right| = \left| \frac{x-1+x^2+1}{x^2+1} \right| =$$

$$= \frac{|x+x^2|}{|x^2+1|} = |x| \frac{|x+1|}{|x^2+1|} \leq |x||x+1|$$

- Eine mögliche Abschätzung: $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, 1\right\}$

Dann gilt wegen $|x| = |x+1-1| \leq |x+1| + 1$

mit $|x+1| < \delta$ mit $|x| \leq |x+1| + 1 < 1 + \delta \leq 2$

$$|f(x) - f(x_p)| = |f(x) - f(-1)| \leq |x||x+1| < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- Alternativ: Auflösen nach $|x+1|$ und dann δ suchen

$$|x||x+1| \leq (|x+1|+1)|x+1| \overset{!}{<} \varepsilon$$

$$|x+1|^2 + |x+1| < \varepsilon$$

$$|x+1|^2 + |x+1| < \delta^2 + \delta = \delta(\delta+1) < \varepsilon$$

für $|x+1| < \delta$.

$$\left.\begin{aligned} &|x+1| < \delta \\ |x| = &|x+1-1| \leq |x+1| + 1 \end{aligned}\right\} \quad |x| \leq |x+1| + 1 < 1 + \delta$$

Nullstellen: $\delta(\delta+1) = \varepsilon$

$$\delta^2 + \delta - \varepsilon = 0$$

hat Lösungen $\delta = -\frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right)^{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}(1+4\varepsilon)^{1/2}$

Wir benötigen Lösung mit $\delta > 0$:

$$\delta = -\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}(1+4\varepsilon)^{1/2}}_{> \frac{1}{2} \text{ für } \varepsilon > 0} > 0 \quad \text{für } \varepsilon > 0$$

Damit ist ein geeignetes δ

$$\delta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+4\varepsilon)^{1/2}$$

da mit $|x+1| < \delta$ gilt

$$|x+1|^2 + |x+1| < \delta^2 + \delta = \delta(1+\delta) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+4\varepsilon)^{1/2}\right) \times \left(+\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+4\varepsilon)^{1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(1+4\varepsilon) - \frac{1}{4} = \varepsilon$$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_p)| = |f(x) - f(-1)| \leq |x+1|^2 + |x+1| < \varepsilon$

für $|x+1| < \delta$ und damit

ist gezeigt, dass $f(x)$ an $x_p = -1$ stetig ist.

6) Integration von $\int \frac{x^7+1}{x^5+x^3}\,dx$

Berechnung durch Partialbruchzerlegung
Hier: Zählergrad > Nennergrad, daher müssen wir zuerst eine Polynomdivision durchführen.

$$(x^7+1) : (x^5+x^3) = x^2 - 1 + \frac{x^3+1}{x^5+x^3}$$
$$\begin{array}{l} x^7+x^5 \\ \hline -x^5+1 \\ -x^5-x^3 \\ \hline x^3+1 \end{array}$$

Faktorisieren des Nenners: $x^5+x^3 = x^3(x^2+1)$
- eine dreifache Nullstelle $(x=0)$
- ein quadratisches Polynom ohne reelle Nullstelle

daher Ansatz für Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^3+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d_1x+d_2}{x^2+1}$$
$$= \frac{(ax^2+bx+c)(x^2+1) + x^3(d_1x+d_2)}{x^3(x^2+1)}$$

Koeffizientenvergleich im Zähler

$$x^4(a+d_1) + x^3(b+d_2) + x^2(a+c) + xb + c = x^3+1$$

$a+d_1 = 0$
$b+d_2 = 1$
$a+c = 0$
$b = 0 \Rightarrow d_2 = 1$
$c = 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow d_1 = 1$

$$\frac{x^7+1}{x^5+x^3} = x^2 - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{x+1}{x^2+1}$$

Integration der Einzelterme

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad \int \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + C$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + C$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - \ln|x| - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \arctan(x) + C.$$

7) Ableitung berechnen.

a) $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \arcsin\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2\right)^{1/2}} \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

$$= \frac{1}{\left(1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right)^{1/2}}\left[\frac{1}{(1+x)^2}\left(-(1+x)-(1-x)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1+x)^2}\right)^{1/2}}\left[\frac{1}{(1+x)^2}(-2)\right]$$

$$= \frac{(1+x)}{\left[(1+2x+x^2)-(1-2x-x^2)\right]^{1/2}}\left(\frac{-2}{(1+x)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(4x)^{1/2}}\frac{(-2)}{(1+x)} = -\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \qquad \square$$

b) $\exp\left(\frac{x^{\cos x}}{x^x}\right) = f(x)$ 10

Schreibe $x^{\cos x} = \exp(\ln(x)\cdot\cos(x))$

$x^x = \exp(\ln(x)\cdot x)$

$$\frac{x^{\cos x}}{x^x} = \exp(\ln(x)(\cos(x) - x))$$

$$f(x) = \exp(\exp(\ln(x)(\cos(x) - x)))$$

$$f'(x) = \exp\{\exp[\ln(x)(\cos(x) - x)]\}$$
$$\times \exp[\ln(x)(\cos(x) - x)]$$
$$\times \left\{\frac{1}{x}(\cos(x) - x) + \ln(x)(-\sin x - 1)\right\}$$
$$= \exp\left(\frac{x^{\cos x}}{x^x}\right)\cdot\frac{x^{\cos x}}{x^x}\left\{\frac{1}{x}\cos(x) - 1 - \ln(x)\sin(x) - \ln x\right\}$$

---

alternativ: separat nach Produktregel ableiten?

$$f'(x) = \exp\left(\frac{x^{\cos x}}{x^x}\right)\left\{\frac{1}{x^x}\exp(\ln(x)\cos(x))\left[\frac{1}{x}\cos x + \ln(x)(-\sin x)\right]\right.$$
$$\left. + x^{\cos x}\exp(-\ln(x)x)\left(-\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\right)\right\}$$
$$= \exp\left(\frac{x^{\cos x}}{x^x}\right)\frac{x^{\cos x}}{x^x}\left\{\frac{1}{x}\cos x - \ln(x)\sin x - 1 - \ln(x)\right\}$$

$\square$