

FERIENKURS ANALYSIS 1

WS 2012/13
Probeklausur

(Bertram Klein)

Freitag, 15. März 2013

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{mit } z \neq 0, z \in \mathbb{C}$$

absolut konvergiert.

Aufgabe 2

Geben Sie den Real- und den Imaginärteil von z an!

a) $z = \frac{1}{a + ib}$

b) $z = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)^3}$

c) $z^2 = 4 + 4i$.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergiert. *Hinweis:* Verwenden Sie das Ergebnis aus a), auch wenn Sie die Aussage nicht bewiesen haben.

c) Warum können Sie die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nicht mit dem Quotienten-Kriterium zeigen?

Aufgabe 4

- a) Zeigen Sie, dass die durch $f(x) = \sqrt{x}$ gegebene Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist. *Hinweis:* Verwenden Sie die Abschätzung $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| < \sqrt{|a - b|}$ für $a, b \in \mathbb{R}$.
- b) Zeigen Sie, dass die durch $f(x) = \sqrt{x}$ gegebene Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[0, \infty)$ nicht Lipschitz-stetig ist. *Hinweis:* Betrachten Sie die Lipschitz-Stetigkeitsbedingung für die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n^2}$ und $\tilde{x}_n = \frac{4}{n^2}$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie durch Rückgriff auf die ε - δ -Definition, dass die durch $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_p = -1$ stetig ist.

Hinweis: Gibt es eine Lösung mit $\delta > 0$ für die Gleichung $\delta(\delta + 1) = \varepsilon$?

Aufgabe 6

Berechnen Sie $\int \frac{x^7 + 1}{x^5 + x^3} dx$.

Aufgabe 7

Berechnen Sie jeweils die Ableitung von $f(x)$ nach x .

- a) $\arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.
- b) $\exp\left(\frac{x^{\cos x}}{x^x}\right)$

Viel Glück und Erfolg für den 5. April!