Ferienkurs Analysis 1

WS 2012/13

5. Übungsblatt

(Bertram Klein) Freitag, 15. März 2013

Aufgabe 1

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = ty^2, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Lösung $y(t)$ für $y_0 = 0$ und $y_0 \neq 0$.

Aufgabe 2

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen, indem Sie das charakteristische Polynom aufstellen, seine Nullstellen bestimmen, und entsprechend der Multiplizität dieser Nullstellen einen geeigneten Ansatz für die Lösung machen. *Hinweis*: Überlegen Sie sich, wieviele Anfangsbedingungen jeweils für eine eindeutige Lösung vorgegeben werden müssen, und wie viele Elemente das Fundamentalsystem das Fundamentalsystem der Gleichung daher haben muss.

a) $\ddot{x} + x = 0$.

b) $\ddot{x} - x = 0$.

c) $\dddot{x} + \ddot{x} - \dot{x} - x = 0$.

d) $\ddot{x} - 10\dot{x} + 25x = 0$.

e) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

mit Konstanten $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$ und $\omega > \gamma$. Schreiben Sie mit Hilfe der Definition $\vec{v} = (x, \dot{x})^T$ die Differentialgleichung in ein System erster Ordnung um. Stellen Sie das charakteristische Polynom auf und lösen Sie die homogene Differentialgleichung.

Aufgabe 4

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie zuerst die Lösung des homogenen Problems und bestimmen Sie dann die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems mittels der Methode der Variation der Konstanten.