Ferienkurs Analysis 1

WS 2012/13

4. Übungsblatt

(Bertram Klein) Donnerstag, 14. März 2013

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$ *Hinweis*: Eine Stammfunktion ist $\displaystyle\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(x)+C.$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x.$ *Hinweis*: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C.$

d) $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{3+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x.$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x.$

Aufgabe 3

Berechnen Sie mittels Partialbruchzerlegung die Stammfunktion.

a) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^3+3x^2-4}\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^3+x}\mathrm{d}x.$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Wert an.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x.$

Aufgabe 5

Differenzieren Sie die folgenden Integrale nach x!

a) $\displaystyle\int_2^{x^2} \frac{\cos^2(t)}{1+\cos(t)} \mathrm{d}t.$

b) $\displaystyle\int_{-x}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z = \dfrac{5+3\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}$.

b) Schreiben Sie $z = 2 + 2\mathrm{i}$ in Polardarstellung.

c) Wandeln Sie $z = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ in die kartesische Darstellung um.

d) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^2 + 2z - \mathrm{i} = 0$.

e) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 + i = 0$.

f) Berechnen Sie $\ln(-8 + 6\mathrm{i})$.

Aufgabe 7*

Weitere Integrale zum Üben.

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{2x}-1} \mathrm{d}x$ *Hinweis*: Substitution $u(x) = \exp(x)$ und evtl. Partialbruchzerlegung.

b) $\displaystyle\int \frac{x^7+1}{x^5+x^3} \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2} \mathrm{d}x$ *Hinweis*: Substitution $x = \sinh(u)$ nach partieller Integration.

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cosh(x)} \mathrm{d}x$ *Hinweis*: Substitution $u(x) = \mathrm{e}^x$ in $\cosh(x)$.

e) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x} \cos(x) \mathrm{d}x.$

Aufgabe 8*

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2(x)} \mathrm{d}x$ divergiert.
Hinweis: $\sin(x) \leq x$ für $x \in [0, \pi/2]$.