Lösungsvorschlag 3

1) Bestimmen von Grenzwerten.

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Läßt sich die Regel von L'Hospital anwenden?
(Existiert der Limes für die Ableitungen?)

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 1$

$g(x) = \tan x \qquad g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 = \lim\limits_{x\to 0} x\cot x$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$f(x) = \cos x - 1 \qquad f'(x) = -\sin x$

$g(x) = \sin^2(x) \qquad g'(x) = 2\sin x\cos x$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\sin x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{2\cos x} = -\frac{1}{2}$

$\underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(x) - 1}{\cos(x)}\right)$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2(x) - 1}{\cos(x)(\sin x + 1)}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{-\cos^2 x}{\cos(x)(1+\sin x)}\right)$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{-\cos x}{1+\sin x}\right) = 0$

d) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x - e^x + 1}{(e^x - 1)\, x} \right) = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$f(x) = x - e^x + 1 \qquad f'(x) = 1 - e^x$

$g(x) = (e^x - 1)\, x \qquad g'(x) = e^x - 1 + x e^x = (1+x) e^x - 1$

$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0 \qquad f''(x) = -e^x$

$\lim_{x \to 0} g'(x) = 0 \qquad g''(x) = e^x + (1+x) e^x = (x+2) e^x$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0} f''(x) = -1 \\ \lim_{x \to} g''(x) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Dann gilt mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -\frac{1}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

2) Stetige Fortsetzung der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ auf ganz $\mathbb{R}$ gesucht.

$f : D \to \mathbb{R}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Der Grenzwert der Funktion ist auch in einem Punkt $p \in \overline{D}$ (im Abschluss von D) definiert, auch wenn $p \notin D$.

Daher können wir fragen, ob der Grenzwert von $f(x)$ in $p = 0$ existiert. $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ mit $h(x) = x$

$g(x) = e^x - 1$

Insbesondere ist $h(0) = 0$ und $g(0) = 0$

$h'(x) = 1$

$g'(x) = e^x$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$

$\Rightarrow$ mit L'Hospital'schen Regel folgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{h'(x)}{g'(x)} = 1$$

Dann gilt $\lim\limits_{x \to p \notin D} f(x) = q$ mit $p = 0$ und $q = 1$

Beachte: $q \neq f(p) = f(0)$, da $p \notin D$ und damit $f(p)$ nicht definiert ist! Für die Grenzwertbildung genügt $p \in \overline{D}$, i.e. es genügt, dass es Folgen in D gibt, für die $p \in \overline{D}$ ein Häufungspunkt ist.

Was muss nun für Stetigkeit erfüllt sein? Für $p \in D$ heißt f stetig im Punkt p, wenn

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

Die stetige Fortsetzung von $f : D \to \mathbb{R}$ auf

$\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{D} = D \cup \{0\} = \mathbb{R}$

ist dann gegeben durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\exp(x) - 1} & x \in D \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Dann ist wegen $\lim\limits_{x \to p} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(p) = \tilde{f}(0) = 1$ die Funktion $\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ an $p = 0 \in \tilde{D}$ stetig.

3) $f(x) = \sqrt{|x|}$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Stetigkeit von f bei x_p: für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x_p)| < \varepsilon$ wenn $|x - x_p| < \delta$

☒ $x_p = 0$: $|f(x) - f(0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| = |\sqrt{x}| \overset{!}{<} \varepsilon$

$|x - 0| = |x| < \varepsilon^2 = \delta$ liefert ein geeignetes δ.

$|x| < \delta \to \sqrt{|x|} = |\sqrt{x}| < \varepsilon$ $\quad (\checkmark)$

☒ $x_p > 0$ $\quad$ Da $f(x) = f(-x)$ beschränken wir uns im Folgenden auf den Fall $x, x_p > 0$.

$$|f(x) - f(x_p)| = |\sqrt{|x|} - \sqrt{|x_p|}| \overset{x>0,\, x_p>0}{=} |\sqrt{x} - \sqrt{x_p}|$$

$$= \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{x_p}|\,|\sqrt{x} + \sqrt{x_p}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_p}|} = \frac{|x - x_p|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_p}} < \frac{|x - x_p|}{\sqrt{x_p}} \overset{!}{<} \varepsilon$$

d.h. $|x - x_p| < \sqrt{x_p}\, \varepsilon = \delta$.

Zusammengenommen: $f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, denn für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein δ

$$\delta = \begin{cases} \varepsilon^2 & x_p = 0 \\ \sqrt{|x_p|}\,\varepsilon & x_p \neq 0 \end{cases}$$

so dass $|f(x) - f(x_p)| < \varepsilon$ wenn $|x - x_p| < \delta$.

Ist die Funktion <u>gleichmäßig</u> stetig? Ja, also das kann man hier nicht ablesen, mit diesem Ergebnis gilt erst einmal <u>nein</u>, denn δ ist explizit von x_p abhängig, d.h. es gibt nicht ein δ, so dass $|f(x) - f(x_p)| < \varepsilon$ für $|x - x_p| < \delta$ $\forall x_p$!

4) Gegeben ist $f(x) = \frac{x}{x-1}$ $\quad f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$

Bestimme für festen Punkt $x_p \neq 1$ und vorgegebenes $\varepsilon > 0$ $\delta(\varepsilon, x_p)$ so, dass für alle x mit $|x - x_p| < \delta(\varepsilon, x_p)$ auch gilt $|f(x) - f(x_p)| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(x_p)| = \left| \frac{x}{x-1} - \frac{x_p}{x_p-1} \right| = \left| \frac{x(x_p-1) - x_p(x-1)}{(x-1)(x_p-1)} \right|$$

$$= \frac{|x_p - x|}{|(x-1)(x_p-1)|} = \frac{|x_p - x|}{|x-1||x_p-1|}$$

Problem: Wir brauchen daraus eine Bedingung für $|x - x_p|$, müssen also noch $|x - x_p|$ im Nenner isolieren.

Benutze $|x-1| = |(x - x_p) + (x_p - 1)| \geq \big||x - x_p| - |x_p - 1|\big|$

$$= |x_p - 1| - |x - x_p|$$

(für $|x - x_p| < \delta < |x_p - 1|$ kann man die äußeren Betragsstriche weglassen)

Damit

$$|f(x) - f(x_p)| = \frac{|x_p - x|}{|x-1||x_p-1|} \leq \frac{|x_p - x|}{(|x_p-1| - |x - x_p|)|x_p - 1|} \overset{!}{<} \varepsilon$$

Auflösen nach $|x - x_p|$:

$$|x_p - x| < \varepsilon |x_p - 1|^2 - |x - x_p||x_p - 1|\varepsilon$$

$$|x_p - x|(1 + \varepsilon|x_p - 1|) < \varepsilon |x_p - 1|^2$$

$$|x - x_p| < \frac{\varepsilon\,|x_p - 1|^2}{1 + \varepsilon\,|x_p - 1|} = \delta(\varepsilon, x_p)$$

b) Sei $x_p \neq 1$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta(\varepsilon, x_p)$

mit $\delta(\varepsilon, x_p) = \dfrac{\varepsilon\,|x_p - 1|^2}{1 + \varepsilon\,|x_p - 1|}$

so dass für $|x - x_p| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(x_p)| = \frac{|x_p - x|}{|x - x_p + x_p - 1|\,|x_p - 1|}$$

$$\leq \frac{|x_p - x|}{\big(|x_p - 1| - |x - x_p|\big)\,|x_p - 1|} < \frac{\delta}{\big(|x_p - 1| - \delta\big)\,|x_p - 1|}$$

(im Nenner zieht man von $|x_p - 1|$ höchstes δ ab, macht den Bruch größer)

$$= \frac{\varepsilon\,|x_p - 1|^2}{\big(1 + \varepsilon\,|x_p - 1|\big)} \cdot \frac{1}{|x_p - 1|} \cdot \frac{1 + \varepsilon\,|x_p - 1|}{|x_p - 1|\big(1 + \varepsilon\,|x_p - 1|\big) - \varepsilon\,|x_p - 1|^2}$$

$$= \frac{\varepsilon\,|x_p - 1|}{|x_p - 1| + \varepsilon\,|x_p - 1|^2 - \varepsilon\,|x_p - 1|^2} = \varepsilon\,\frac{|x_p - 1|}{|x_p - 1|} = \varepsilon$$

(*) d.h. für $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta(x_p, \varepsilon)$, so dass
für $|x - x_p| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_p)| < \varepsilon$.

[Das muss man nicht notwendig noch einmal nachrechnen, denn das haben wir ja so konstruiert. Eigentlich muss man zum Lösen der Teilaufgabe nur das Argument (*) machen mit konstruiertem $\delta(x_p, \varepsilon)$]

5) $f(x) = x^2$ $\quad f: D \to \mathbb{R}$ $\quad D = [1, 3] \subset \mathbb{R}$

Zu zeigen: f ist Lipschitz-stetig.

d.h. es gibt eine Konstante $L \geq 0$ mit der Eigenschaft, dass $|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$ für alle $x, x' \in D$

Hier: $|f(x) - f(x')| = |x^2 - x'^2| =$

$$= |(x - x')(x + x')| = |x + x'||x - x'|$$

$$\leq \max\{x + x' : x, x' \in [1, 3]\}|x - x'|$$

$$\leq 6|x - x'|$$

D.h. $f(x) = x^2$ ist auf $D = [1, 3]$ Lipschitz-stetig mit $L = 6 \geq 0$.

6) a) $f(x) = \exp(ax)\sin(\omega x + \alpha)$

$$f'(x) = a\exp(ax)\sin(\omega x + \alpha) + \exp(ax)\,\omega\cos(\omega x + \alpha)$$

$$= \exp(ax)\left(a\sin(\omega x + \alpha) + \omega\cos(\omega x + \alpha)\right)$$

b) $f(x) = \cos(\sin(\cos(x^2)))$ =

$$= -\sin(\sin(\cos(x^2)))\cos(\cos(x^2))(-\sin(x^2))2x$$

$$= 2\sin(\sin(\cos(x^2)))\cos(\cos(x^2))\sin(x^2)\,x$$

7) Eine Funktion f heißt differenzierbar im Punkt p, wenn der Grenzwert

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

existiert; dann ist $f'(p)$ die Ableitung.

Also wir suchen das für die Funktion

$$f(x) = |x|^a \sin \frac{1}{x} \quad \text{für } x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

am Punkt $p = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|^a \sin \frac{1}{x} - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x|^a}{x} \sin \frac{1}{x}$$

Da $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ beschränkt ist, kommt es für die Konvergenz auf $\frac{|x|^a}{x}$ an. Für $a < 1$ und $x \to 0$ ist der Ausdruck divergent und der Grenzwert existiert nicht. Für $a > 1$ gilt $\lim_{x \to 0} \frac{|x|^a}{x} = 0$ und

$\lim_{x \to 0} \frac{|x|^a}{x} \sin \frac{1}{x} = 0$ existiert.

Für $a = 1$ untersuchen wir gesondert:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

1. e. hier sind links- und rechtsseitiger Grenzwert nicht gleich, und der Grenzwert existiert ebenfalls nicht.

Daher: Für $a > 1$ ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

am Punkt $x_p = 0$ differenzierbar, und die Ableitung ist $f'(0) = 0$.

8) $f(x) = 4|x-1|^3 + |x|^3$ auf $-\infty < x < \infty$.

a) $|x|^3 \geq 0$, $|x-1|^3 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

noch zu zeigen: $f(x) > 0$, d.h. $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Widerspruchsbeweis: Nimm an, es gibt $\tilde{x}$ mit

$f(\tilde{x}) = 0 \Leftrightarrow |\tilde{x}-1|^3 = 0 \wedge |\tilde{x}|^3 = 0 \Rightarrow$ Widerspruch

$\Rightarrow f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = \lim\limits_{|x| \to \infty} \left(4|x-1|^3 + |x|^3\right) = +\infty$.

b) $x < 0$: $f(x) = -4(x-1)^3 - x^3$, $f'(x) = -12(x-1)^2 - 3x^2$

$f'(x)$ stetig auf $(-\infty, 0)$, da Polynom.

$0 < x < 1$: $f(x) = -4(x-1)^3 + x^3$, $f'(x) = -12(x-1)^2 + 3x^2$

$f'(x)$ stetig auf $(0,1)$, da Polynom.

$1 < x$: $f(x) = 4(x-1)^3 + x^3$, $f'(x) = 12(x-1)^2 + 3x^2$

$f'(x)$ stetig auf $(1, \infty)$, da Polynom.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -12 \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -12 \Rightarrow f'(0) = -12$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = 3 \qquad \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = 3 \Rightarrow f'(1) = 3$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) \text{ stetig auf } \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \\ f'(0) = -12 \\ f'(1) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) \text{ stetig auf } \mathbb{R}.$$

c) $x < 0 \quad f''(x) = -24(x-1) - 6x = -30x + 24$

$f''(x)$ stetig auf $(-\infty, 0)$, da Polynom.

$0 < x < 1 \quad f''(x) = -24(x-1) + 6x = -18x + 24$

$f''(x)$ stetig auf $(0,1)$ da Polynom

$x > 1 \quad f''(x) = 24(x-1) + 6x = 30x - 24$

$f''(x)$ stetig auf $(1, \infty)$ da Polynom.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f''(x) = 24 \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f''(x) = 24 \Rightarrow f''(0) = 24$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f''(x) = 6 \qquad \lim\limits_{x \to 1^+} f''(x) = 6 \Rightarrow f''(1) = 6$

$$\Rightarrow f''(x) = \begin{cases} -30x + 24 & x \leq 0 \\ -18x + 24 & 0 < x \leq 1 \\ 30x - 24 & x > 1 \end{cases} \quad \text{und } f''(x) \text{ ist stetig auf } \mathbb{R}.$$

d) folgt unmittelbar aus b) und c), da die Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ existieren und sogar stetig sind. (f differenzierbar: $f''(x)$ existiert für alle x im Def.bereich.)

9) Taylorpolynome.

a) $f(x) = \exp(\sin(x)) \qquad x_p = 0$

$$f'(x) = \exp(\sin(x))\cos(x)$$
$$f''(x) = \exp(\sin(x))\cos^2(x) - \exp(\sin(x))\sin(x)$$
$$f'''(x) = \exp(\sin(x))\cos^3(x) + \exp(\sin(x))\,2\cos x\,(-\sin x)$$
$$- \exp(\sin x)\cos x \sin x - \exp(\sin(x))\cos(x)$$
$$= \exp(\sin(x))\left[\cos^3(x) - 3\cos x \sin x - \cos(x)\right]$$

ausgewertet an $x_p = 0$:

$$f(0) = e^0 = 1$$
$$f'(0) = e^0 \cdot 1 = 1$$
$$f''(0) = e^0 \cdot 1 - 0 = 1$$
$$f'''(0) = e^0[1 - 0 - 1] = 0$$

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)(x - x_p) + \frac{f''(0)}{2!}(x - x_p)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x - x_p)^3$$
$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + 0$$

Alternativ aus den bekannten Reihenentwicklungen:

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \dots$$
$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

$$\exp(\sin(x)) = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \dots\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \dots\right)^2$$
$$+ \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \dots\right)^3$$
$$= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$
$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4) \qquad (\checkmark)$$

b) $f(x) = \log(x^2)$ $\quad x_p = 1$ $\quad f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x^2} 2x = \frac{2}{x}$ $\quad f'(1) = 2$

$f''(x) = -\frac{2}{x^2}$ $\quad f''(1) = -2$

$f'''(x) = +\frac{4}{x^3}$ $\quad f'''(1) = +4$

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)(x-1) + \frac{1}{2!} f''(0)(x-1)^2 + \frac{1}{3!} f''(0)(x-1)^3$$
$$= 0 + 2(x-1) + \frac{1}{2}(-2)(x-1)^2 + \frac{1}{6} 4 (x-1)^3$$
$$= 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3$$

10) a) $f(x) = |x|$

$x > 0$: $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$x < 0$: $f(x) = -x \Rightarrow f'(x) = -1$

Für $x_p = 0$ ist $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{-x}{x} & \text{für } x < 0 \\ \frac{x}{x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$

Dann ist $\lim\limits_{x^+ \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ und $\lim\limits_{x^- \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$

d.h. $f'(0)$ existiert nicht. $f': \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$.

b) $f(x) = x\sqrt{|x|}$

$x > 0$: $f(x) = x\sqrt{x} = x^{3/2}$ $\quad f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}$

$x < 0$: $f(x) = x(-x)^{1/2}$ $\quad f'(x) = (-x)^{1/2} + x \frac{1}{2}(-x)^{-1/2}(-1)$

$= (-x)^{1/2} + \frac{1}{2}(-x)(-x)^{-1/2} = (-x)^{1/2} + \frac{1}{2}(-x)^{1/2} = \frac{3}{2}(-x)^{1/2}$

Was passiert für $x=0$?

für $x_p=0$ und $h \neq 0$ $\quad f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\sqrt{|h|}}{h} = \lim_{h \to 0} \sqrt{|h|} = 0$$

$\Rightarrow$ Grenzwert existiert und $f'(0) = 0$.

Damit $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(-x)^{1/2} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ \frac{3}{2}x^{1/2} & x>0 \end{cases}$,