Ferienkurs Analysis 1

WS 2012/13

3. Übungsblatt

(Bertram Klein) Mittwoch, 13. März 2013

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \dfrac{1}{\cos x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\exp x - 1} - \dfrac{1}{x}\right)$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die stetige Fortsetzung der Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x}{\exp x - 1}$ auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die durch $f(x) = \sqrt{|x|}$ gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an jedem Punkt $x_p \in \mathbb{R}$ stetig ist. Ist die Funktion auch gleichmässig stetig? *Hinweis*: Es gibt einen gesondert zu behandelnden Punkt, machen Sie dafür eine entsprechende Fallunterscheidung.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$.

a) Für $x_p \neq 1$ bestimmen Sie $\delta(\varepsilon, x_p)$ so, dass für alle x mit $|x - x_p| < \delta(\varepsilon, x_p)$ gilt $|f(x) - f(x_p)| < \varepsilon$. *Hinweis*: Benutzen Sie die Abschätzung $|a + b| \geq ||a| - |b||$.

b) Zeigen Sie, dass f für alle $x_p \neq 1$ stetig ist.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^2$ mit $f : D \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $D = [1, 3] \subset \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 6

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f(x)$ die jeweiligen Ableitungen nach x.

a) $f(x) = \exp(ax)\sin(\omega x + \alpha)$

b) $f(x) = \cos(\sin(\cos(x^2)))$

Aufgabe 7

Für welche Werte $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^a \sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ im Punkt $x_p = 0$ differenzierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung!

Aufgabe 8

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 4|x-1|^3 + |x|^3$ auf $-\infty < x < \infty$.

a) Zeigen Sie: $f(x) > 0$ für alle x. Welchem Wert strebt $f(x)$ zu für $x \to \pm\infty$?

b) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$.

c) Zeigen Sie, dass $f''(x) = \begin{cases} -30x + 24, & x \leq 0 \\ -18x + 24, & 0 < x \leq 1 \\ 30x - 24, & x > 1 \end{cases}$.

d) Zeigen Sie, dass $f(x)$ für alle x zweimal differenzierbar ist.

Aufgabe 9

Geben Sie für $f(x)$ jeweils das Taylorpolynom dritten Grades im Punkt x_p an.

a) $f(x) = \exp(\sin(x))$, $x_p = 0$.

b) $f(x) = \log(x^2)$, $x_p = 1$.

Aufgabe 10

Berechnen Sie die Ableitung nach x dort, wo die Funktion $f(x)$ differenzierbar ist.

a) $f(x) = |x|$.

b) $f(x) = x\sqrt{|x|}$.