Ferienkurs Analysis 1

WS 2012/13

2. Übungsblatt

(Bertram Klein) Dienstag, 12. März 2013

Aufgabe 1

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

a) Jede konvergente Folge hat einen Grenzwert. richtig.

b) Der Grenzwert einer Folge kann sich ändern, wenn man endlich viele Folgenglieder ändert. falsch

c) Jede Nullfolge ist eine konvergente Folge. richtig

d) Jede konvergente Folge ist beschränkt. richtig

e) Seinen (a_n), (b_n) zwei Folgen. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n)$. falsch

f) Seinen (a_n), (b_n) zwei divergente Folgen. Dann ist auch $(a_n + b_n)$ divergent. falsch

g) Es gibt Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$, die nicht konvergieren. falsch

h) Jede Folge hat mindestens einen Häufungspunkt. falsch

i) Jede beschränkte, reelle Folge hat mindestens einen Häufungspunkt. richtig

j) Jede konvergente Folge hat mindestens einen Häufungspunkt. falsch

k) Der Wert einer Reihe ändert sich nicht, wenn man endlich viele Summanden abändert. falsch

l) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist (a_n) eine Cauchyfolge. richtig

m) Wenn (a_n) eine Cauchyfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. falsch

n) Wenn (a_n) eine Nullfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. falsch

o) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen sind, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ falsch

Aufgabe 2

Geben Sie Beispiele an für:

a) eine beschränkte Folge, die nicht konvergiert.

b) eine unbeschränkte Folge mit einer konvergenten Teilfolge.

c) eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert.

d) eine divergente Reihe $\sum_n a_n$, wobei a_n eine Nullfolge ist.

e) eine Reihe, die konvergiert, aber nicht das Quotientenkriterium erfüllt.

Aufgabe 3

Beweisen Sie die folgende Aussage: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Lösungsvorschlag 2

1) Aussagen.

a) richtig.

b) falsch. Sei $\pi(n)$ eine Permutation, die endlich viele Folgenglieder vertauscht, und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die abgeänderte Folge.
Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein N, so dass für $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$. Wähle nun

$N_\pi = \max\{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(N-1)\} + 1$

(i.e. N_π größer als alle Indexpositionen, an die Folgenglieder hingetauscht wurden, für die $n \geq N$ nicht erfüllt war).
Dann gilt für die neue Folge

$|b_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N_\pi$, d.h. die abgeänderte Folge hat den gleichen Grenzwert.

c) richtig. Jede Nullfolge ist konvergent, da sie gegen 0 konvergiert.

d) richtig. Siehe Aufgabe 3.

e) falsch. Das gilt nur für zwei konvergente Folgen.

f) falsch. Gegenbeispiel $a_n = n$ und $b_n = -n$
(beide divergent, aber $a_n + b_n = 0$ ist konvergent)

g) falsch. $\mathbb{R}$ ist vollständig, daher konvergiert auch jede Cauchy-Folge.

h) falsch. Die Folge $a_n = n$ hat z.B. keinen Häufungspunkt.

i) richtig. Satz von Bolzano-Weierstraß.

j) falsch. Jede konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt.

k) falsch.

l) richtig. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar eine Nullfolge

m) falsch. z.B. konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht, obwohl $\frac{1}{n}$ Cauchy-Folge.

n) falsch. gleiches Beispiel wie m).

o) falsch. Das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen ist gegeben durch das Cauchy-Produkt.

2) Beispiele.

a) beschränkte Folge, die nicht konvergiert:

z.B. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$

Beschränktheit: Es gilt $|a_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Konvergenz: Folge konvergiert nicht. Angenommen, sie konvergiere gegen $a \in \mathbb{R}$. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Für alle $n \geq N$ folgt dann mit der Dreiecksungleichung:

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n|$$
$$< 1 + 1 = 2 \Rightarrow 2 < 2 \text{ Widerspruch!}$$

Also ist $(a_n)_n$ divergent.

b) unbeschränkte Folge mit konvergenter Teilfolge:

z. B. die Folge $(a_n)_n$ mit $a_{2n} = n$ und $a_{2n+1} = 1$

oder mit $a_{2n} = n$ und $a_{2n+1} = \frac{1}{n}$

c) konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert:

alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

d) divergente Reihe $\sum_n a_n$, wobei a_n eine Nullfolge ist:

harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

e) eine Reihe, die konvergiert, aber nicht das Quotientenkriterium erfüllt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Warum? $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right| = 1$

ist nicht $= q < 1$

3) Beweisen Sie: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beschränktheit: Eine Folge $(a_n)_n$ heißt beschränkt, wenn es ein $M \geq 0$ gibt, so dass $|a_n| < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$.

Es gilt dann (Dreiecksungleichung)

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

für alle $n \geq \mathbb{N}$.

Wir setzen $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$

Damit gilt $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ☒

4) Konvergenzuntersuchungen von Reihen:

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometr. Reihe}}}{=} 2 \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2 \frac{1}{3/2} = \frac{4}{3}$$

Da auch $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ existiert, konvergiert die Reihe auch absolut.

Also hier gezeigt durch Vergleich mit der geometrischen Reihe.

Alternativ Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n}{2^{n+1}} \right| = \frac{1}{2} = q < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut nach dem Quotientenkriterium.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$

(Das ist die Taylorreihe für $\cos(x)$, sie konvergiert also absolut für alle $x \in \mathbb{R}$)

Konvergenz läßt sich zeigen nach dem Quotientenkriterium.
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x| < n_0$ (Archimedisches Axiom). Für alle $n > n_0$ gilt damit

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-1)}{(2n+2)!} \frac{x^{2n+2}}{x^{2n}} (2n)! \right| = \left| \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \right|$$

$$\leq \frac{|x|^2}{4n^2} \leq \frac{|x|^2}{4n_0^2} \leq \frac{1}{4} = q < 1$$

Somit konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-3}$ divergiert nach dem Minorantenkriterium.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-3} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2} \geq \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{harmonische Reihe}} = +\infty$$

Die harmonische Reihe ist also eine divergente Minorante, und daher divergiert auch die Reihe.

d) da $-1 \leq \sin x \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

gilt $$\left| \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^{5/2}} \right| \leq \frac{1}{n^{5/2}}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ konvergiert als verallgemeinerte harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ mit $a > 1$.

Damit gibt es eine konvergente Majorante, und die Reihe konvergiert absolut nach dem Majorantenkriterium.

Einschub: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ heißt allgemeine harmonische Reihe und konvergiert für $a > 1$ und divergiert für $a \leq 1$.
Zeigen kann man das mit dem Cauchy-Verdichtungskriterium:
Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann sind die beiden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ entweder beide divergent oder beide konvergent.

Anwendung auf allgemeine harmonische Reihe: $a_k = \frac{1}{k^a}$ ist monoton fallende Nullfolge. Daher betrachte

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^a} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{a-1}} \right)^n.$$ Das ist also genau die geometrische Reihe, welche für $\frac{1}{2^{a-1}} < 1$ konvergiert, also für $a > 1$. Damit folgt nach dem Cauchy-Verdichtungskriterium auch die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ für $a > 1$.

e) Die harmonische Reihe divergiert.

Das kann man über eine Abschätzung der Partialsummen zeigen. Definiere

$$s_{2^k} = \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots +$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{n} \right)$$

Jede der Teilsummen hat $2^{j+1} - 2^j = 2^j(2-1) = 2^j$ Glieder, und für jedes Glied a_j der j-ten Teilsumme gilt $a_j \geq \frac{1}{2^{j+1}}$

Daher kann man abschätzen

$$\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{n} \geq 2^j \cdot \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}$$

Es folgt

$$s_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + (k-1)\frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2}.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt, und die Reihe divergiert.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium:

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Daher konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

Sie konvergiert aber nicht absolut, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, wie gerade unter e) gezeigt.

5) Auswertung von Reihen

a) Hier kann man Partialsummen explizit durch eine Teleskopsumme auswerten und erhält den Grenzwert aus der Folge der Partialsummen.

Für alle $n \geq 1$ hat man die Zerlegung

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)}\right)$$

Damit findet man für die Teilsumme eine Teleskopsumme

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)$$

Der Grenzwert der Folge s_k der Partialsummen bestimmt sich damit direkt zu

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}$$

und es gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ ist beinahe eine

Exponentialreihe:

$$= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} - 1\right) = 2(e^2-1).$$

c) Auswertung durch Teleskopsumme in Partialsumme. Benutze

$$\frac{1}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{3n+1} - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{3n+1} - \sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3k+1}\right)$$

Daher $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n-2)} = \lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{3}.$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n/2} 2^{1-n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

kann auf die geometrische Reihe zurückgeführt werden

$= 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n - 1 \right) =$ $\qquad \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

$= 2 \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - 1 \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) =$

$= 2 \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

6) Konvergenzradius.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} z^n$ hat Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{2}$$

da $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1$$

11

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sqrt{(3n-2)2^n}\, z^n$

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{3^n \sqrt{(3n-2)2^n}}}$$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} 3\sqrt{2}\sqrt[2n]{3n-2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3}\sqrt[2n]{n-\frac{2}{3}} = 1\cdot 1$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n} z^n$

Hier gibt es zwei Häufungspunkte der Koeffizienten mit unterschiedlichen Werten, daher ist zum ersten Mal von Bedeutung, dass in der Definition des Konvergenzradius der größte Häufungspunkt (limes superior) benutzt wird.

i.e. $(2+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat zwei Häufungspunkte, 1 und 3, und wir benötigen denjenigen, der zum größten Koeffizienten gehört (3)

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{(2+(-1)^n)^n}{n}}} = \frac{1}{\limsup \frac{2+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{3}.$$