# Ferienkurs Analysis 1

WS 2012/13

2. Übungsblatt

(Bertram Klein) Dienstag, 12. März 2013

## Aufgabe 1

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

a) Jede konvergente Folge hat einen Grenzwert.

b) Der Grenzwert einer Folge kann sich ändern, wenn man endlich viele Folgenglieder ändert.

c) Jede Nullfolge ist eine konvergente Folge.

d) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

e) Seinen $(a_n)$, $(b_n)$ zwei Folgen. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n)+\lim_{n\to\infty}(b_n)$.

f) Seinen $(a_n)$, $(b_n)$ zwei divergente Folgen. Dann ist auch $(a_n + b_n)$ divergent.

g) Es gibt Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$, die nicht konvergieren.

h) Jede Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.

i) Jede beschränkte, reelle Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.

j) Jede konvergente Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.

k) Der Wert einer Reihe ändert sich nicht, wenn man endlich viele Summanden abändert.

l) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist $(a_n)$ eine Cauchyfolge.

m) Wenn $(a_n)$ eine Cauchyfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

n) Wenn $(a_n)$ eine Nullfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

o) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen sind, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

## Aufgabe 2

Geben Sie Beispiele an für:

a) eine beschränkte Folge, die nicht konvergiert.

b) eine unbeschränkte Folge mit einer konvergenten Teilfolge.

c) eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert.

d) eine divergente Reihe $\sum_n a_n$, wobei $a_n$ eine Nullfolge ist.

e) eine Reihe, die konvergiert, aber nicht das Quotientenkriterium erfüllt.

## Aufgabe 3

Beweisen Sie die folgende Aussage: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

## Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ mit $x \in \mathbb{R}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 3}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^{5/2}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

## Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n-2)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n/2} 2^{1-n}$

## Aufgabe 6

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} z^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sqrt{(3n-2)2^n} z^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + (-1)^n)^n}{n} z^n$