Lösungsvorschlag 1

Aufgabe 1: Zu zeigen: $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

"$\Rightarrow$": Zeige $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

Es ist Gleichheit von zwei Mengen zu zeigen, also

① $(A \cup B) \subset B$ und ② $B \subset (A \cup B)$ (trivial)

②: $x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B) \Rightarrow B \subset (A \cup B)$

①: $x \in (A \cup B) \Rightarrow (x \in A \subset B \vee x \in B) \Rightarrow (A \cup B) \subset B$.

Daher $B \subset (A \cup B)$ und $(A \cup B) \subset B \Rightarrow (A \cup B) = B$

"$\Leftarrow$": Zeige $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$

$x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in B$ für alle $x \in A$.

Daher ist jedes Element x von A auch in B, also ist $A \subset B$.

Aufgabe 2:

a) Direkter Beweis: $n \in \mathbb{N}$ gerade heißt, dass man es durch $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$ darstellen kann.
Dann ist $n^2 = 2(2k^2)$, also ist auch n^2 gerade.

b) Beweis durch Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
Hier: A: "n^2 ist gerade"
B: "$n \in \mathbb{N}$ ist gerade"

$\neg B \Rightarrow \neg A$: "Wenn $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist, dann ist n^2 ungerade"

Beweis dann analog zu a):

Wenn $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist, läßt es sich darstellen als
$n = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann ist
$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k)+1$
ebenfalls ungerade. $\square$

c) Direkter Beweis durch Konstruktion.
Nach Hinweis: $n!+k$ ist für $k>1$ und $k \leq n$
immer durch k teilbar, kann also keine Primzahl sein.
($k=1$ ist offensichtlich ausgeschlossen, da natürlich auch eine Primzahl durch 1 teilbar ist..)
Damit gibt es ($k=2, \ldots, k=n$) $n-1$ aufeinanderfolgende Zahlen, die keine Primzahlen sind. Wir verlangen aber n aufeinanderfolgende Zahlen, daher brauchen wir
$N = (n+1)!$
Dann sind $N+2, N+3, \ldots, N+n+1$ durch $2, 3, \ldots, n+1$ teilbar und wir haben für jedes n n aufeinanderfolgende Zahlen konstruiert, die keine Primzahlen sind.

d) Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, es gebe eine größte Primzahl m. Dann ist $m!$ durch alle Primzahlen teilbar, und damit ist $m!+1$ durch keine Primzahl teilbar, muss also selbst eine Primzahl sein!
Da $m!+1 > m$ ist das ein Widerspruch zur Annahme, m sei die größte Primzahl. Daher muss die Annahme falsch sein.

Aufgabe 3

a) $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right)$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{n+1}{k(n-k+1)}\right) = \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \binom{n+1}{k}$$

b) Induktionsanfang $n = 1$

$$(a+b)^1 = a+b = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{1}{0} b^1 + \binom{1}{1} a = a+b$$

Induktionsschritt: Wir nehmen an, es gelte

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{(Induktionsannahme)}$$

Dann

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) \overset{IA}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} b^{n+1}$$

$$\overset{(a)}{=} \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} \qquad \square$$

Aufgabe 4

a) Induktionsanfang $n=1$

$$\sum_{k=0}^{1} a^k b^{1-k} = a^0 b^1 + a^1 b^0 = b + a = \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}$$
$$= \frac{a^2-b^2}{a-b} \quad \checkmark.$$

Induktionsschritt. Induktionsannahme: Wir nehmen an, es gelte schon

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

Dann gilt für $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n+1-k} = b \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} + a^{n+1}$$
$$\overset{IA}{=} b\,\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} + a^{n+1} = \frac{a^{n+2} - b a^{n+1} + b a^{n+1} - b^{n+2}}{a-b}$$
$$= \frac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a-b}. \quad \square$$

b) Wir setzen in die schon bewiesene Formel aus (a) $a=7$ und $b=1$ (erfüllt offensichtlich $a \neq b$, $a,b \in \mathbb{R}$)

Dann $\dfrac{7^{n+1}-1}{6} = \sum_{k=0}^{n} 7^k \in \mathbb{N}$

d.h. $7^{n+1}-1$ ist durch 6 teilbar.

Für $n=0$ (nicht in unserer Induktion eingeschlossen) ist $7^1-1=6$ auch trivialerweise durch 6 teilbar, also gilt das für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5

Beweis mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang $n=1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

für n gilt. Dann

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$\overset{IA}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)}{(n+2)}. \quad \square$$

Aufgabe 6. Abbildungen $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$

a) $g \circ f$ ist injektiv $\Rightarrow$ f ist injektiv. (w)

Beweis: Durch Kontraposition, zeige: f nicht injektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ nicht injektiv.

Nehme also an, f sei nicht injektiv.

Dann gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ also mit $f(x_1) = f(x_2)$.

Dann folgt $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$,

also ist auch $g \circ f$ nicht injektiv. $\square$

b) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g ist surjektiv (w)

(Wenn bei der Hintereinanderausführung von f und g jedes Element in Z ein Urbild hat, dann muss auch unter g jedes Element $z \in Z$ ein Urbild in Y haben...)

Direkter Beweis: Zu zeigen ist:

Für alle $z \in Z$ gibt es ein $y \in Y$, so dass $g(y) = z$.

Nach Voraussetzung ist $g \circ f$ surjektiv, d.h. für jedes $z \in Z$ gibt es ein $x \in X$, so dass $g(f(x)) = z$

Da $f(x) = y \in Y$, gibt es damit für jedes $z \in Z$ ein $y \in Y$, so dass $g(y) = z$. $\square$

c) g ist injektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ ist injektiv. (f)

(Kann nicht sein: Wenn f nicht injektiv ist, dann ist es auch $g \circ f$ nicht, wie wir unter (a) gezeigt haben!)

Gegenbeispiel: Wähle $g = id_X : X \to X$

$f: X \to X, x \mapsto 1 \;\forall x$

Dann ist g injektiv (sogar bijektiv), aber $g \circ f$ trotzdem nicht! Es ist dann nämlich $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) = 1$ für alle $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$.

Aufgabe 7 $f: A \to B$ $\alpha: A \to X$
$g: X \to Y$ $\beta: B \to Y$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

α, β bijektiv

$g \circ \alpha = \beta \circ f$

Behauptung: f injektiv $\Leftrightarrow$ g injektiv

„$\Rightarrow$": Es gilt $g \circ \alpha = \beta \circ f$. Da α bijektiv ist, gibt es eine Umkehrabbildung $\alpha^{-1}: X \to A$. Mit dieser ist $g = \beta \circ f \circ \alpha^{-1}$. Da α^{-1} und β bijektiv sind, und f nach Voraussetzung injektiv, folgt mit dem Hilfssatz sofort, dass auch die Hintereinanderausführung $\beta \circ f \circ \alpha^{-1}$ injektiv ist (2mal anwenden). Damit ist auch g injektiv.

„$\Leftarrow$": g injektiv $\Rightarrow$ f injektiv lässt sich analog mit der Umkehrabbildung $\beta^{-1}: Y \to B$ der bijektiven Abb. β zeigen. Damit

$$\beta^{-1} \circ g \circ \alpha = f$$

und mit dem Hilfssatz folgt, dass f injektiv ist, wenn g injektiv ist.

Aufgabe 8: Beispiel für einen geordneten, abzählbaren Körper: $\mathbb{Q}$ (Menge der rationalen Zahlen).

$\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig, d.h. er hat nicht die Supremumseigenschaft: Es gibt beschränkte Teilmengen in $\mathbb{Q}$, die keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$ haben.

(Standardbeispiel: $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ und daher die kleinste obere Schranke nicht in $\mathbb{Q}$ liegt!)

Aufgabe 9. Im Prinzip wären hier alle Körperaxiome zu zeigen (Abgeschlossenheit, Existenz neutraler und inverser Elemente, Kommutativität und das Distributivgesetz).

Das meiste davon kann man ablesen, wenn man die Additions- und Multiplikationstabellen aufstellt.

Addition $(1+2) \bmod 3 = (3) \bmod 3 = 0$ $\quad$ $(2 \cdot 2) \bmod 3 = (4) \bmod 3 = 1$

$\oplus_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\odot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

- Offensichtlich ist der Körper abgeschlossen bezüglich der Mod-3-Addition und -Multiplikation.
- Kommutativität kann man sofort daran ablesen, dass die Tabellen symmetrisch zur Diagonalen sind.
- 0 und 1 sind die neutralen Elemente.
- 2 und 1 sind sich gegenseitig inverses Element bezüglich der Addition
- 2 ist sich selbst inverses Element bezüglich der Multiplikation.

Daher ist dieser Körper auch nicht geordnet, denn es gibt keine "positiven Zahlen" K_+, so dass für $k_1, k_2 \in K_+$ gelten würde $k_1 + k_2 \in K_+$ (Beispiel $(1+2) \bmod 3 = 0 \notin K_+$)

Alternativ: Nimm an, es gebe eine Ordnungsrelation $<$ gemäß der $0<1$ und $0<2$ und $1<2$. Es gilt nun $(1+2) \bmod 3 = 0$. Also verletzt diese Ordnungsrelation die Forderung, dass gelten muss $x+y < x+z$ für $x,y,z \in K$ und $y<z$:

$$\underset{(1\,<\,2)}{0 \oplus_3 1 = 1 < 1 \oplus_3 1 = 2} \quad \text{für } 0<1 \quad \text{oder}$$

$$\underset{(2\,<\,0)}{1 \oplus_3 1 = 2 < 1 \oplus_3 2 = 0} \quad \text{für } 1<2 \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ keine Ordnungsrelation definierbar!

(Distributivgesetz wäre noch zu zeigen, funktioniert auch.)