Ferienkurs Analysis 1

WS 2012/13

1. Übungsblatt

(Bertram Klein) Montag, 11. März 2013

Aufgabe 1

Gegeben seien zwei Mengen A, B. Zeigen Sie: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, dann ist auch n^2 gerade.

b) $n \in \mathbb{N}$ ist gerade, wenn n^2 gerade ist.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es n aufeinander folgende Zahlen, die keine Primzahlen sind. (*Hinweis*: Überlegen Sie sich, durch welche Zahl $n! + k$ für $k \in \mathbb{N}$ teilbar ist!)

d) Es gibt keine größte Primzahl.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass für $n, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ und $n \in \mathbb{N}$ die verallgemeinerte geometrische Summenformel gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

b) Zeigen Sie jetzt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $7^n - 1$ durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 6

Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Zeigen Sie, welche der folgenden Implikationen zutreffend sind und welche nicht.

a) $g \circ f$ ist injektiv $\Rightarrow$ f ist injektiv.

b) $g \circ f$ ist surjektiv $\Rightarrow$ g ist surjektiv.

c) g ist injektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ ist injektiv.

Aufgabe 7

Gegeben seien die Abbildungen $f : A \to B$, $g : X \to Y$, $\alpha : A \to X$ und $\beta : B \to Y$. Es gelte $g \circ \alpha = \beta \circ f$. Weiterhin seien α, β bijektiv.

Zeigen Sie: g ist genau dann injektiv, wenn f injektiv ist.

Hinweis: Benutzen Sie folgenden Satz (ohne Beweis): Seien $\varphi : K \to L$ und $\psi : L \to M$ zwei Abbildungen, dann gilt:

a) Sind beide Abbildungen injektiv, so ist auch $\psi \circ \varphi$ injektiv.

b) Sind beide Abbildungen surjektiv, so ist auch $\psi \circ \varphi$ surjektiv.

Aufgabe 8

Nennen Sie ein Beispiel für einen geordneten Körper mit abzählbar vielen Elementen. Ist der Körper, den Sie als Beispiel gewählt haben, vollständig?

Aufgabe 9 (Zusatzaufgabe)

Zeigen Sie: Die Menge $K_3 = \{0, 1, 2\}$ mit der Modulo-3-Addition $\oplus_3 : k_1 \times k_2 \to (k_1 + k_2) \bmod 3$ und der Modulo-3-Multiplikation $\odot_3 : k_1 \times k_2 \to (k_1 \cdot k_2) \bmod 3$ bildet einen Körper. Ist es ein geordneter Körper?