FLA
24.1

<u>Übungen 4</u>

1. $GL(n, K) := \{ A \in K^{n \times n} : A \text{ invertierbare Matrix} \}$

1) Das neutrale Element ist $E_n = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ Stück}})$

2) Ist $A \in GL(n, K)$, dann existiert natürlich auch $A^{-1} \in K^{n \times n}$

3) Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ, da die Verknüpfung „$\circ$" der zugrundeliegenden linearen Abbildungen assoziativ ist.

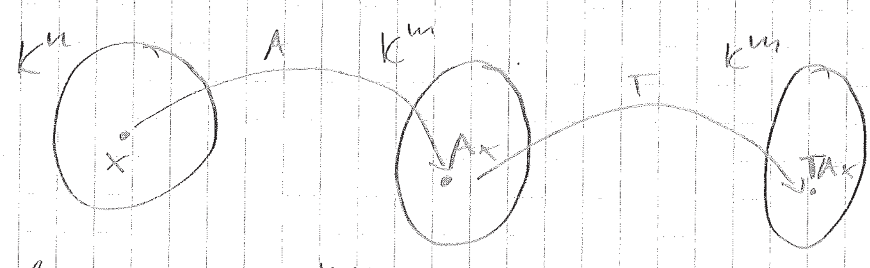
Außerdem ist $GL(n, K)$ abgeschlossen, da $A, B \in GL(n, K)$
$\Rightarrow A \cdot B$ ist invertierbare $n \times n$-Matrix mit $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

<u>$n = 1$:</u> $GL(1, K) = K$ ist der Körper selbst. Dieser ist <u>abelsch</u>.

<u>$n = 2$:</u> Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A, B \in GL(2, \mathbb{R})$.

Es gilt $AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow GL(n, K)$ ist für $n \geq 2$ <u>nicht abelsch</u>.

2.


Dabei ist $A \in K^{m \times n}$, $T \in GL(m, K)$

<u>Beh:</u> $\text{Kern}(TA) = \text{Kern}(A)$

„$\subseteq$" Sei $y \in \text{Kern}(TA)$, d.h. $TAy = 0$

Da $T \in GL(m, K)$, insb. T invertierbar (und T linear)

folgt $T^{-1} TAy = Ay = 0 \Rightarrow y \in \text{Kern}(A)$.

FLA

L4, 2

"⊇" Sei $x \in \text{Kern}(A)$, d.h. $Ax = 0$

Da $T \in GL(m, K)$, ist T linear und es folgt

$TAx = 0 \Rightarrow x \in \text{Kern}(TA)$.

3. Wir betrachten zunächst $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit den Basen $B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$$B' = \left\{ v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir bzgl. der Basis B als $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B = x \cdot v_1 + y \cdot v_2$ und bzgl. der Basis B' als $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{B'} = x' \cdot v_1' + y' \cdot v_2'$.

Die lineare Abbildung sei gegeben durch (bzgl. B)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

d.h. die Abbildungsmatrix bzgl. B lautet $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Frage: Wie lautet sie bzgl. B'?

i) Finde Transformation S zwischen Basen:

$v_j' \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{n} s_{ij} v_i$, also $v_1' = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$

Zeile (i), Spalte (j)

$v_2' = 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Mit der allgemeinen Formel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(für $ad - bc \neq 0$) folgt ihr Inverses:

FLA
L4.3

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ii) Laut Vorlesung (Korollar 4.7) folgt

$$A' = S^{-1} A S = \ldots = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}$$

Das ist die Darstellungsmatrix von f bzgl. B'.

iii) Was bedeutet das?

Nehmen wir ein $v \in \mathbb{R}^2$ und schreiben ihn bzgl. B

$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_B$, d.h. $x = 3v_1 + v_2$

Dieses x kann auch bzgl. B' geschrieben werden:

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'}$, d.h. $x = v_1' + v_2'$

Bilden wir nun x über f ab:

$$f(x) = A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}_B} =: y \in \mathbb{R}^2$$

oder $f(x) = A'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{B'} =: y' \in \mathbb{R}^2$

Wir überzeugen uns, dass $y' = y$ gilt, indem wir y' bzgl. B ausdrücken:

$$y' = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{B'} = 4 \cdot v_1' + \frac{1}{2} \cdot v_2' = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}_B = y} \checkmark$$

FLA
L4,4

4. a) $\det(A^T) = \det(A)$

b) $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$

c) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ ist <u>falsch!</u>

Gegenbeispiel: Sei $A \in GL(2n, K)$ d.h. A invertierbar. Dann ist $B := -A$ auch in $GL(2n,K)$ und es gilt: $\det(A+B) = \det(0) = 0$,

aber $\det(A) + \det(B) =$

$= \det(A) + \det(-A) =$ ← Skalare werden mit $(\cdot)^{\dim}$ aus $\det(\cdot)$ herausgezogen

$= \det(A) + \underbrace{(-1)^{2n}}_{=+1} \det(A) =$

$= 2\det(A) \neq 0$, denn A invertierbar.

<u>Bemerkung:</u> Hier ist wichtig, dass $2n$ gerade war!

d) $\det(AB) = \det(BA)$

e) $\det(A^k) = (\det(A))^k$

f) $\det(S^{-1}AS) = \det(ASS^{-1}) = \det(A)$

5. <u>$n=3$</u>

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{pmatrix} =$$

↓ entwickle nach der 1. Spalte

$$= 1\cdot\det\begin{pmatrix} y-x & y^2-x^2 \\ z-x & z^2-x^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (y-x)(z^2-x^2) - (z-x)(y^2-x^2) =$$ ← 3. Binomische Formel

$$= \underline{(y-x)(z-x)}(z+x) - \underline{(z-x)(y-x)}(y+x) =$$ ← ausklammern

$$= (y-x)(z-x)(z+\cancel{x}-y-\cancel{x}) =$$

$$= (y-x)(z-x)(z-y)$$

<u>Für allgemeines n per Induktion!</u>

FLA
L4,5

6. Beh: $A \in GL(n,K) \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Bew: „$\Rightarrow$" Sei A invertierbar, d.h. $\exists A^{-1}$ mit $E_n = AA^{-1}$. Daher $1 = \det(E_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$.

Daher muss $\det(A) \neq 0$ gelten.

„$\Leftarrow$" Sei $\det A \neq 0$. Angenommen A ist dennoch nicht invertierbar, dann muss (siehe Lemma 3.5) $\text{Rang}(A) < n$, denn A ist auch nicht surjektiv. Daher gibt es in A linear abhängige Spalten und damit (siehe Definition 4.8(ii)) muss $\det A = 0$ sein. Dies ist ein Widerspruch, also $A \in GL(n,K)$.

Die Aussage $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ folgt aus „$\Rightarrow$".

7. $\Pi_n \subseteq K^{n \times n}$ sei die Menge aller <u>Permutationsmatrizen</u>.

a) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gehört zu $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\pi \in S_5$ mit $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Matrixgestalt

$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, z.B. $Pe_3 = e_4$ ✓

GESTRICHEN

c) Jede Permutation $\pi: \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ ist bijektiv, also invertierbar. Linearität ist klar. Die Eigenschaft $P_{\pi\circ\sigma} = P_\pi P_\sigma$ lässt sich mit (zu) viel Schreibarbeit zeigen. Bei Interesse: siehe Literatur!

FLA
L4, 6

8. i) Beh: Seien $v_1, \dots, v_n$ EV zu paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von $f \in End(V)$. Dann sind die n EV linear unabhängig.

Beweis: Wir zeigen dies durch Induktion.

$n=1$: Der EV $v_1 \neq 0$ ist linear unabhängig ✓

$n \mapsto n+1$: Betrachte

$0 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i$ mit $\alpha_i \in K$. Multipliziere mit λ_{n+1},

$$\Rightarrow \quad 0 = \lambda_{n+1} \cdot 0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{n+1} \alpha_i v_i \,, \quad (1)$$

oder wende f an: λ_i ist EW zu v_i

$$\Rightarrow \quad 0 = f(0) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(v_i) \overset{\downarrow}{=} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \alpha_i v_i \quad (2)$$

Betrachte die Differenz (1) − (2):

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_i) \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_i) \alpha_i v_i$$

Laut Induktionsvoraussetzung müssen alle Koeffizienten verschwinden: $(\lambda_{n+1} - \lambda_i) \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

Da aber alle λ_i $(i = 1, \dots, n+1)$ paarweise verschieden sind, müssen alle $\alpha_i = 0 \;\; \forall i = 1, \dots, n$.

Bleibt also $0 = \alpha_{n+1} v_{n+1}$, und da $v_{n+1} \neq 0$ ein EV ist, muss auch $\alpha_{n+1} = 0$ sein.

$\Rightarrow \quad \{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ sind linear unabhängig. ▮

ii) Das Hauptlemma besagt: Für $f \in End(V)$, $A \in K^{n \times n}$ gilt:

λ EW von $f \Leftrightarrow Kern(f - \lambda id_V) \neq \{0\}$,

bzw. λ EW von $A \Leftrightarrow det(A - \lambda E_n) = 0$

FLA
L4,7

Beweis: $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow f(x) - \lambda x = 0$, d.h. $(f - \lambda id_V)(x) = 0$, d.h. $x \in \mathrm{Kern}(f - \lambda id_V)$. Da x ein EV ist, gilt $x \neq 0$.
Für Matrizen finden wir: $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E_n)x = 0$, d.h. $\mathrm{Kern}(A - \lambda E_n) \neq \{0\}$, d.h. $A - \lambda E_n$ ist nicht invertierbar. $\Leftrightarrow \det(A - \lambda E_n) = 0$.

9. a) $B \in K^{m \times n}$, $C \in K^{n \times m}$

Bel: $\mathrm{Spur}(BC) = \mathrm{Spur}(CB)$

Bew:

$B_{ij}, C_{ji} \in K$, d.h. sie sind vertauschbar

$$\mathrm{Spur}(BC) = \sum_{i=1}^{m} (BC)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} B_{ij} C_{ji} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{ji} B_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (CB)_{jj} = \mathrm{Spur}(CB).$$

b) Seien A, A' ähnlich, d.h. $\exists S \in GL(n, K)$ mit $A' = S^{-1}AS$.

$E_n = S^{-1}S$

$$\chi_{A'} = \det(A' - \lambda E_n) = \det(S^{-1}AS - \lambda E_n) =$$
$$= \det(S^{-1}(A - \lambda E_n)S) =$$
$$= \det((A - \lambda E_n)\underbrace{SS^{-1}}_{=E_n}) = \det(A - \lambda E_n) = \chi_A.$$

10. a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ist zu diagonalisieren.

i) $\Rightarrow \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = (\ldots) =$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(X-1)^2(X+1)$$

EW von A sind Nullstellen von $\chi_A(\lambda) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \ (\alpha_1 = 2)$, $\lambda_2 = -1 \ (\alpha_2 = 1)$

FLA
L4,8

ii) Berechne den Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$:

$E_A(1) = \mathrm{Kern}(A - 1 \cdot E_3)$, d.h.

$$(A - E_3)x \overset{!}{=} 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gaußverfahren: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow E_A(1) = \left\{ x = \begin{pmatrix} -\lambda + \mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in K \right\} = K\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die geometrische Vielfachheit ist $\gamma_1 = \dim E_A(1) = 2 = \alpha_1$ ✓

iii) Berechne nun $E_A(-1)$

$$(A - (-1)E_3)x \overset{!}{=} 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß: $\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow E_A(-1) = \left\{ x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{2}{3}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in K \right\} = K\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auch hier gilt $\gamma_2 = \dim E_A(-1) = 1 = \alpha_2$ ✓

Damit ist A diagonalisierbar mit

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ und man erhält

$$D = S^{-1}AS = (\ldots) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

FLA
L 4,9

b) Die Abbildungsmatrix lautet $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\Rightarrow \chi_A(\lambda) = (\dots) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$

mit Nullstellen $\underline{\lambda_1 = 1}$ $(\alpha_1 = 2)$, $\underline{\lambda_2 = -2}$ $(\alpha_2 = 1)$

ii) Berechne Eigenräume:

$E_A(1) = \text{Kern}(A - 1 \cdot E_3)$

Gauß: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_A(1) = \left\{ x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\mu \\ \frac{1}{3}\mu \\ \mu \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

d.h. $\gamma_1 = \dim E_A(1) = 1 < \alpha_1 = 2$

$\Rightarrow$ A ist <u>nicht</u> diagonalisierbar!

Zur Vollständigkeit noch $E_A(-2)$:

$E_A(-2) = \text{Kern}(A - (-2)E_3)$

Gauß: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_A(-2) = \left\{ x = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\mu \\ -\frac{1}{3}\mu \\ \mu \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Hier gilt: $\gamma_2 = \dim E_A(-2) = 1 = \alpha_2$ ✓