Ferienkurs Lineare Algebra 1

TUM – WS 2012/13

Übungsblatt 4 – Diagonalisierung

Robert Lang (rl@ph.tum.de) Donnerstag, 21. März 2013

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(n, K)$ eine Gruppe ist. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist sie Abelsch?

Aufgabe 2
Sei $A \in K^{m \times n}$ und $T \in \mathrm{GL}(m, K)$. Weisen Sie nach, dass $\mathrm{Kern}\,(TA) = \mathrm{Kern}\,(A)$ gilt.

Aufgabe 3
Führen Sie einen Basiswechsel konkret im $\mathbb{R}^2$ durch. Dazu betrachen wir die Standardbasis

$$B = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

sowie eine weitere Basis

$$B' = \{v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\} .$$

Die lineare Abbildung sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto (2x - y, x + y)$ bezüglich der Standardbasis B.

(a) Wie lautet die Abbildungsmatrix A bezüglich B?

(b) Finden Sie die Transformation $S = (s_{ij})_{i,j=1,2}$ zwischen den Basen B und B' (siehe Vorlesung). D.h. Sie müßen folgende Transformation betrachten:

$$v_j' = \sum_{i=1}^{2} s_{ij} v_i \ .$$

(c) Bestimmen Sie damit die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis B'

(d) Was bedeutet das?

Aufgabe 4
Welche der folgenden Rechenregeln sind korrekt? Es sind $k \in \mathbb{N}$ und $S \in \mathrm{GL}(n, K)$. Für falsche finde man ein Gegenbeispiel!

(a) $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$

(b) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(c) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

(d) $\det(AB) = \det(BA)$

(e) $\det(A^k) = (\det(A))^k$

(f) $\det(S^{-1}AS) = \det(A)$

Aufgabe 5
Berechnen Sie die Vandermonde-Determinante; zunächst für $n = 3$, dann allgemein.

Aufgabe 6
Beweisen Sie das Invertierbarkeitskriterium in Satz 4.11 aus der Vorlesung.
Warum gilt für invertierbare Matrizen $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$?

Aufgabe 7
Eine Matrix $P \in K^{n\times n}$ heißt Permutationsmatrix, wenn P aus E_n durch Vertauschen von Spalten hervorgeht, d.h. wenn es eine Permutation $\pi \in S_n$ gibt, sodass $P = (e_{\pi(1),\dots,e_{\pi(n)}})$ gilt, d.h. $Pe_k = e_{\pi(k)}$. $\Pi_n \subseteq K^{n\times n}$ bezeichne die Menge aller Permutationsmatrizen.

(a) Zu welcher Permutation gehört die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

(b) Wie sieht die Permutationsmatrix zu $\pi \in S_5$ mit $\pi(n) = n + 1$ für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $\pi(5) = 1$ aus?

Aufgabe 8
Beweisen Sie Lemma 4.15 zur linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren von paarweise verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie außerdem das Hauptlemma 4.17, d.h. den Zusammenhang zwischen Eigenwerten und dem charakteristischen Polynom.

Aufgabe 9
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $B \in K^{m\times n}$ und $C \in K^{n\times m}$ gilt $\mathrm{Spur}\,(BC) = \mathrm{Spur}\,(CB)$

(b) Die charakteristischen Polynome ähnlicher Matrizen sind identisch.

Aufgabe 10

(a) Diagonalisieren Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Ist der folgende Endomorphismus f diagonalisierbar: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mit $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (y, -2x + z, -2x + 5y)$?