FLA
A3,1

Addendum 3

1. Betrachte $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

a) Wir berechnen Kern(A): (mittels Gauß) $\downarrow$ Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegen der Nullzeile ist $x = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig

Dritte Zeile $\Rightarrow 2\lambda + y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y = -2\lambda$

Zweite Zeile $\Rightarrow -2\lambda + 2z \overset{!}{=} 0 \rightarrow z = \lambda$

$\Rightarrow$ $\underline{\text{Kern}(A)} = \left\{ v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Damit ist $\underline{\dim \text{Kern}(A) = 1}$.

Nach dem Kern-Bild muss also

Rang (A) = dim Bild(A) = $\underline{2}$ sein.

$\uparrow$

$\underset{3}{\underset{\shortparallel}{\dim V}} = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\dim \text{Kern}(A)}} + \dim \text{Bild}(A)$

b) Bild (A) wird berechnet, indem man so lange Spaltenumformungen durchführt, bis Nullspalten auftreten. Die verbleibenden Spalten spannen das Bild von A auf:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

FLA

A3,2

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

d.h. $\text{Bild } A = \text{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) =$

$$= \left\{ v = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Dies ist eine Ebene (UVR) im $\mathbb{R}^3$ und es gilt (wie erwartet): $\text{Rang}(A) = 2$ ✓

2. Betrachte $B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 16 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

a) B ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Der Kern-Bild-Satz sagt:

$$\underbrace{\dim V}_{=4} = \dim \text{Kern}(B) + \underbrace{\text{Rang}(B)}_{\leq 3}$$

Daher wissen wir, dass der Kern von B mindestens 1-dimensional sein muss!

b) Zuerst berechnen wir Bild(B):

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 16 & 2 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 10 & 2 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

FLA
A 3,3

$\Rightarrow$ Bild (B) $= \left\{ v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

d.h. Rang(B) = dim Bild(B) = 2

$\Rightarrow$ dim Kern(B) muss 4 − 2 = 2 sein!

c) Wir berechnen nun Kern(B):

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 16 & 2 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ist $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in$ Kern(B), so ist wg. der Nullzeile

$v_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

zweite Zeile $\Rightarrow$ $v_1 + 2v_2 + \lambda \overset{!}{=} 0$

Sei also $v_1 = \mu \in \mathbb{R}$ beliebig

$\Rightarrow$ $v_2 = -\frac{1}{2}(\lambda + \mu)$

erste Zeile $\Rightarrow$ $v_2 + v_3 = -\frac{1}{2}(\lambda+\mu) + v_3 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ $v_3 = -v_2 = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)$

$\longrightarrow$ Kern(B) $= \left\{ v = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

Wie erwartet gilt: dim Kern(B) = 2 ✓