FLA
L3,1

Übungen 3

1. (a) $f: V \to V,\ x \mapsto \alpha x$ ist linear ✓

(b) Projektion ist linear ✓

(c) Translation ist i.A. <u>nicht</u> linear (nur für $a=0$)

(d) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \varphi \in V,\quad F_\varphi: V \to V,\ f(x) \mapsto \varphi(x) f(x)$

Seien $f, g \in V,\ \lambda \in K$

$$\Rightarrow F_\varphi(f + \lambda g)(x) = \varphi(x)(f + \lambda g(x)) =$$
$$= \varphi(x)(f(x) + \lambda g(x)) =$$
$$= \varphi(x) f(x) + \lambda \varphi(x) g(x) =$$
$$= [F_\varphi(f) + \lambda F_\varphi(g)](x)$$ ✓

(e) $V = K^Y,\ W = K^X,\quad \varphi \in Y^X,\quad F_\varphi: V \to W,\ f \mapsto f \circ \varphi$

Seien $f, g \in V,\ \lambda \in K$

$$\Rightarrow F_\varphi(f + \lambda g) = (f + \lambda g) \circ \varphi =$$
$$= f \circ \varphi + \lambda g \circ f = F_\varphi(f) + \lambda F_\varphi(g)$$ ✓

(f) $f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, 0, x_1)$

Seien $z = (x_1, x_2, x_3),\ z' = (x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{C}^3,\quad \lambda \in \mathbb{C}$.

$$\Rightarrow f(z + \lambda z') = f(x_1 + \lambda x_1', x_2 + \lambda x_2', x_3 + \lambda x_3') =$$
$$= (x_2 + \lambda x_2', 0, x_1 + \lambda x_1') =$$
$$= f(z) + \lambda f(z')$$ ✓

2. a) Zu zeigen ist die Eindeutigkeit der linearen Fortsetzung.
Seien also $f, g: V \to W$ linear mit $f(x_i) = g(x_i)\ \forall i = 1, \dots, n$.
Sei $x \in V$ beliebig. Bzgl. der Basis $\{x_i\}_{i=1}^n$ gilt
$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Da f, g linear sind, folgt
$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g(x_i) = g(x)$. Da x beliebig
war, folgt $f = g$.

FLA
L3,2

b) Sei $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$

i) Dies ist eine Basis des $\mathbb{C}$-VR $\mathbb{C}^3$, denn sei $z \in \mathbb{C}^3$ beliebig, dann muss gelten:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \overset{!}{=} z$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & 1 & i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Gauß-Verfahren:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 0 & z_1 \\ 0 & 1-i & i & z_2 - z_1 \\ 0 & 0 & -i & z_3 - z_2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & z_3 \\ 0 & 1-i & 0 & z_3 - z_1 \\ 0 & 0 & -i & z_3 - z_2 \end{array}\right)$$

d.h. $\underline{\gamma} = i(z_3 - z_2)$, $\underline{\beta} = \frac{z_3 - z_1}{1-i}$, $\underline{\alpha} = z_3 - \beta$

$\Longrightarrow \{x_1, x_2, x_3\}$ ist $\underline{\text{Basis}}$ ✓

ii) Seien nun $y_1 = \begin{pmatrix} 5i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$

Nach Satz 3.1 gibt es genau eine lineare Abbildung $f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ mit $f(x_i) = y_i$.

Wir sehen an: $Ax = y$ mit

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} x \overset{!}{=} y$$

Zunächst $\underline{x = x_3}$: $\longrightarrow$ $\underline{b = 0}$, $\underline{h = 0}$, $\underline{e = 1 - i}$

Aus $\underline{x = x_2}$ folgt: $\underline{c} = -ia$, $\underline{f} = i - 1 - id$, $\underline{j} = -ig$

Bleibt $\underline{x = x_1}$: $\begin{pmatrix} a + c \\ d + e + f \\ g + j \end{pmatrix} \overset{!}{=} y_1 = \begin{pmatrix} 5i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h.

FLA
L3,3

i) $a + c = a - ia = a(1-i) \overset{!}{=} 5i \Rightarrow \underline{a = \frac{5i}{2}(1+i)}$

$\Rightarrow \underline{c = \frac{5}{2}(1+i)}$

ii) $d + e + f = d + \cancel{(1-i)} + \cancel{i-1} - id = d(1-i) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \underline{d = 0}, \quad \underline{f = i-1}$

iii) $g + j = g - ig = g(1-g) \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \underline{g = \frac{1+i}{2}}, \quad \underline{j = \frac{1-i}{2}}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{5i}{2}(1+i) & 0 & \frac{5}{2}(1+i) \\ 0 & 1-i & i-1 \\ \frac{1+i}{2} & 0 & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

Check: $Ax_i = y_i$ ✓

Für $x = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ i-1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. a) Bild $f = V$, Kern $f = \{0\}$

b) Bild $f = K$, Kern $f = \{0\}$

d) Der zugrundeliegende VR ist ∞-dimensional.

i) Definiere $N_\varphi := \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = 0\}$, sowie

$\tilde{V} := \{g \in V : g(x) = 0 \ \forall x \in N_\varphi\} \subseteq V$

Es ist $\tilde{V}$ ein VR und es gilt $\underline{\text{Bild}(F_\varphi) = \tilde{V}}$.

[<u>Achtung</u>: Die Aussage $N_g = N_\varphi$ für ein $g \in V$ ist nicht notwendigerweise korrekt, denn g kann auch außerhalb von N_φ verschwinden! Es gilt nur $N_g \supseteq N_\varphi$, z.B. $0 \in \tilde{V}$]

Für ein $g \in \tilde{V}$ existiert ein $f \in V$ mit $F_\varphi(f) = g$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0, & x \in N_\varphi \\ \frac{g(x)}{\varphi(x)}, & x \notin N_\varphi \end{cases}$$

FLA
L3,4

Für dieses f gilt:

$$F_\varphi(f)(x) = \varphi(x) f(x) = \left\{ \begin{matrix} 0, & x \in N_\varphi \\ g(x), & x \notin N_\varphi \end{matrix} \right\} = g(x)$$

d.h. $\tilde{V} \subseteq \text{Bild}(F_\varphi)$.

$\text{Bild}(F_\varphi)$ ist aber auch nicht größer, denn sei $h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = V$ mit $h \notin \tilde{V}$, d.h. $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ mit $h(x_0) \neq 0$ aber $\varphi(x_0) = 0$.
Sei nun ein beliebiges $f \in V$, so gilt

$$F_\varphi(f)(x_0) = \underbrace{\varphi(x_0)}_{=0} f(x) = 0 \neq h(x_0), \quad \text{d.h. } h \notin \text{Bild}(F_\varphi).$$

Damit ist $\boxed{\tilde{V} = \text{Bild}(F_\varphi)}$ gezeigt.

ii) Für den Kern definiere $\hat{V} := \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(x) = 0 \ \forall x \notin N_\varphi \} \subseteq V$

Wir zeigen $\hat{V} = \text{Kern}(F_\varphi)$:

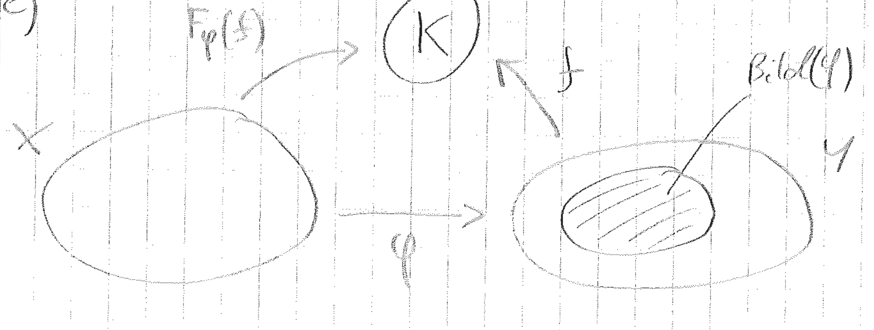
Sei $f \in \hat{V}$, dann folgt

$$F_\varphi(f)(x) = \varphi(x) f(x) = \left\{ \begin{matrix} 0 \cdot f(x) = 0, & x \in N_\varphi \\ \varphi(x) \cdot 0 = 0, & x \notin N_\varphi \end{matrix} \right\} = 0,$$

d.h. $\hat{V} \subseteq \text{Kern}(F_\varphi)$.

Sei umgekehrt $f \in \text{Kern}(F_\varphi)$, d.h. $F_\varphi(f)(x) = \varphi(x) f(x) = 0$
Für $x \notin N_\varphi$ folgt $\varphi(x) \neq 0$, d.h. $f(x) = 0$, also $f \in \hat{V}$.
Dies zeigt $\text{Kern}(F_\varphi) \subseteq \hat{V}$, also $\boxed{\hat{V} = \text{Kern}(F_\varphi)}$

c)



FLA
L 3,5

i) Für $f \in \text{Kern}(F_\varphi)$ muss gelten

$F_\varphi(f) = f \circ \varphi = 0, \quad f : Y \to K,$

$$\Leftrightarrow \quad f(y) = \begin{cases} 0 & , y \in \text{Bild}(\varphi) \\ \text{beliebig} & , \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $\forall x \in X: \; F_\varphi(f)(x) = (f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)) = 0$ ✓

ii) Bild(F_φ) ist nach meiner Ansicht nicht näher zu beschreiben.

Ist z.B. $\varphi : X \to Y$ konstant, dann können nur konstante F_φ generiert werden.

f) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, 0, x_1)$

$$\Rightarrow \text{Bild}(f) = \mathbb{C} \times \{0\} \times \mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C} \right\}$$

und $\text{Kern}(f) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$

4. Beh: Für $\dim V = \dim W < \infty$ und $f : V \to V$ linear gilt:

f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv $\Leftrightarrow$ f bijektiv

Bew: Dies folgt aus dem Kern-Bild-Satz 3.8:

$\dim V = \dim \text{Kern}(f) + \text{Rang}(f)$

„$\Rightarrow$" f injektiv $\Rightarrow \text{Kern}(f) = \{0\} \Rightarrow \dim \text{Kern}(f) = 0$

$\Rightarrow \text{Rang}(f) = \dim V = n$, also f surjektiv.

„$\Leftarrow$" Genauso

Bijektivität folgt aus der Äquivalenz injektiv $\Leftrightarrow$ surjektiv ////

FLA
L3,6

5. Für $\dim V = \dim W < \infty$, $f: V \to W$ linear gilt:
f ist Isomorphismus (d.h. bijektiv) $\Leftrightarrow$ f ist injektiv
oder f ist surjektiv.

<u>Bew:</u> Das folgt direkt aus dem Kern-Bild-Satz.

6. Seien V, W VR und $f: V \to W$ linear. $U \subseteq V$ sei ein VR-Komplement von $\mathrm{Kern}(f)$, d.h. $V = U \oplus \mathrm{Kern}(f)$.

<u>Bel:</u> $f_U: U \to \mathrm{Bild}(f)$, $x \mapsto f_U(x) = f(x)$ ist Isomorphismus.

<u>Bew:</u> f_U entsteht durch Einschränkung von f auf U und ist damit <u>linear</u>. Nach Konstruktion ist f_U auch <u>surjektiv</u>. Sei nun $x, y \in U$ mit $f_U(x) = f_U(y)$
$\Rightarrow f_U(x-y) = 0$, d.h. $x - y \in \mathrm{Kern}(f)$.
Gleichzeitig also $x - y \in U$, d.h. es folgt $x - y = 0$, denn $U \cap \mathrm{Kern}(f) = \{0\}$. Daher ist f_U <u>injektiv</u>.
Insgesamt ist f_U ein Isomorphismus.

7. <u>Bel:</u> V, W, U VR, $f: V \to W$, $g: W \to U$ linear. Dann ist auch $g \circ f: V \to U$ linear.

<u>Bew:</u> Sei $x, y \in V$, $\lambda \in K$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + \lambda y) &= g(f(x + \lambda y)) = g(f(x) + \lambda f(y)) = \\ &= g(f(x)) + \lambda g(f(y)) = \\ &= (g \circ f)(x) + \lambda (g \circ f)(y)\end{aligned}$$

8. $K^{n \times n}$, die Menge aller $n \times n$-Matrizen ist ein K-VR:
0), Die Addition von Matrizen ist Abelsche Gruppe,
die skalare Multiplikation erfolgt komponentenweise

FLA
L3,7

1) – 4) Dies erfolgt ebenso komponentenweise

9. a) Die Lösung ist eindeutig:

$x = 0, \quad y = -7, \quad z = 5$

b) Die Lösung ist einparametrig:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Die Lösung ist eindeutig:

$a = 5, \quad b = 4, \quad c = 3, \quad d = 2, \quad e = 1$

10. Die gewählte Zahl sei N, die Endziffer heiße n und die Zahl, welche aus den ersten fünf Ziffern gebildet wird, heiße a:

$N = 10a + n$

Verschiebt man nun n an den Anfang, so entsteht

$M = 100.000n + a$.

Es muss gelten: $M = 5N$, d.h.

$$100.000n + a = 50a + 5n \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{7a}{14.285}$$

Dieser Bruch lässt sich nicht weiter kürzen, d.h.
$n \in \{1, \ldots, 9\}$ erfordert $a = 14.285$ (damit $n = 7$)

$\rightarrow N = 142.857$ und $M = 5N = 714.285$